QUADRIPOLI DEL II° ORDINE

Mediante un quadripolo del 2° ordine si possono realizzare tutti i tipi di filtri: passa basso, passa-alto, passa-banda, elimina banda.
Le f.d.t. dei quattro tipi di filtro si differenziano tra loro solo per il diverso numeratore (hanno lo stesso denominatore); esse sono riportate nella seguente tabella.

Passa-basso	$\dfrac{A_o}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+2\zeta\cdot\dfrac{s}{\omega_o}+1}=\dfrac{A_o\omega_o^2}{s^2+2\zeta\omega_o s+\omega_o^2}=\dfrac{A_o\omega_o^2}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s+\omega_o^2}$
Passa-alto	$\dfrac{A_o\cdot\dfrac{s^2}{\omega_o^2}}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+2\zeta\cdot\dfrac{s}{\omega_o}+1}=\dfrac{A_o s^2}{s^2+2\zeta\omega_o s+\omega_o^2}=\dfrac{A_o s^2}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s+\omega_o^2}$
Passa-banda	$\dfrac{A_o 2\zeta\cdot\dfrac{s}{\omega_o}}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+2\zeta\cdot\dfrac{s}{\omega_o}+1}=\dfrac{A_o 2\zeta\omega_o s}{s^2+2\zeta\omega_o s+\omega_o^2}=\dfrac{A_o\cdot\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s+\omega_o^2}$
Elimina-banda	$\dfrac{A_o\left(\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+1\right)}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+2\zeta\cdot\dfrac{s}{\omega_o}+1}=\dfrac{A_o(s^2+\omega_o^2)}{s^2+2\zeta\omega_o s+\omega_o^2}=\dfrac{A_o(s^2+\omega_o^2)}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s+\omega_o^2}$

Dove Q_o è legato al fattore di smorzamento dalla relazione $2\alpha = 2\zeta = \dfrac{1}{Q_o}$

Spesso Q_o viene detto **fattore di merito**. ω_o è la **pulsazione dell'oscillazione non smorzata** (e in particolari condizioni coincide con la **pulsazione di taglio**).

Quadripolo passa-basso

$$G(s)=\frac{A_o\omega_o^2}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q_o}\cdot s+\omega_o^2}$$

Posto $s = j\omega$ e dividendo numeratore e denominatore per ω_o^2, si ottiene:

$$G(j\omega)=\frac{A_o\omega_o^2}{-\omega^2++j\omega\cdot\dfrac{\omega_o}{Q_o}s+\omega_o^2}=\frac{A_o}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)^2+j\dfrac{1}{Q_o}\cdot\dfrac{\omega}{\omega_o}}$$

Il cui modulo e fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{A_o}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = -\mathrm{arctg}\frac{\frac{1}{Q_o}}{\frac{\omega_o}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_o}}$$

Il limite inferiore di Q_o è **0,5**.

Il modulo di $|G(j\omega)|$ in decibel è:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log A_o - 20\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

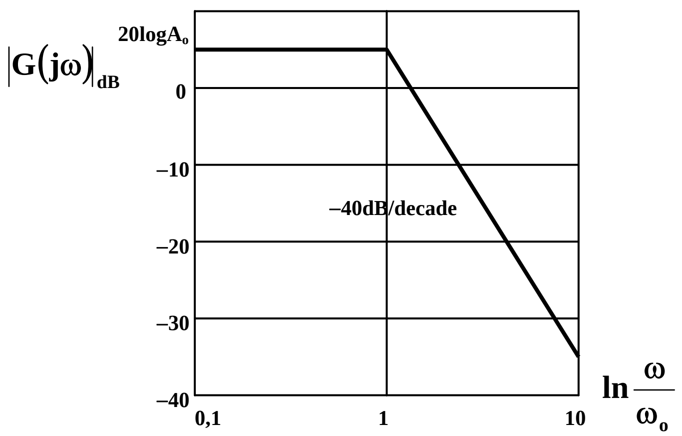
$$\mathbf{per}\quad \omega \ll \omega_o \;\Rightarrow\; \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \ll 1 \;\; \mathbf{e} \;\; \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \ll 1 \;\Rightarrow \mathbf{trascurabili\;\; rispetto}\;\; 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |G(j\omega)|_{dB} = 20\log A_o \qquad \mathbf{primo\;\; asintoto}$$

$$\mathbf{per}\quad \omega \gg \omega_o \;\Rightarrow\; \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \gg 1 \;\; \mathbf{e} \;\; \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^4 \gg \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 \;\Rightarrow\; 1 \;\; \mathbf{e} \;\; \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2$$

$$\mathbf{trascurabili} \;\Rightarrow\; |G(j\omega)|_{dB} = 20\log A_o - 40\log\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right) \qquad \mathbf{secondo\;\; asintoto}$$

Il diagramma asintotico di Bode (valido per $Q_o \geq 0{,}5$) è il seguente:



Il primo asintoto è parallelo all’asse delle ascisse; il secondo è una retta con pendenza $-40\dfrac{\mathbf{dB}}{\mathbf{decade}}$ che incontra il primo asintoto per $\dfrac{\omega}{\omega_o}=1$.

Quando risulta $Q_o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la curva reale è il più possibile piatta e la pulsazione di taglio coincide con ω_o. Un quadripolo con $Q_o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0{,}707$, viene detto a **banda piatta** o di **Butterworth**.

Un quadripolo con $Q_o>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ viene anche detto di **Chebyschev**.

Qualora sia $Q_o=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ il quadripolo viene detto di **Bessel** (o di **Thompson**).

Quadripolo passa-alto

$$G(s)=\frac{A_o s^2}{s^2+\dfrac{\omega_o}{Q}\cdot s+\omega_o^2}$$

Dividendo numeratore e denominatore per s^2 e ponendo $s=j\omega$, si ottiene:

$$G(s)=\frac{A_o\omega_o^2}{1+\dfrac{\omega_o}{Q_o}\cdot\dfrac{1}{s}+\dfrac{\omega_o^2}{s^2}}\quad\Rightarrow\quad G(j\omega)=\frac{A_o}{1-\left(\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^2-j\dfrac{1}{Q_o}\cdot\dfrac{\omega_o}{\omega}}$$

Il cui modulo e fase sono:

$$|G(j\omega)|=\frac{A_o}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right]^2+\left(\dfrac{1}{Q_o}\cdot\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}\quad;\quad \varphi=-\mathrm{arctg}\frac{\dfrac{1}{Q_o}\cdot\dfrac{\omega_o}{\omega}}{1-\left(\dfrac{\omega_o}{\omega}\right)^2}=-\mathrm{arctg}\frac{\dfrac{1}{Q_o}}{\dfrac{\omega}{\omega_o}-\dfrac{\omega_o}{\omega}}$$

Confrontando queste espressioni con quelle del quadripolo passa-basso, si nota che esse differiscono solo per il fatto che le precedenti sono espresse in funzione di $\dfrac{\omega}{\omega_o}$, e queste in funzione di $\dfrac{\omega_o}{\omega}$; pertanto il comportamento delle curve sarà l'inverso di quello del quadripolo passa-basso; in particolare la fase varierà da **180°** a **0°**.

Il limite inferiore per Q_o è sempre **0,5**.

Il modulo di $|G(j\omega)|$ in decibel è:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log A_o - 20\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}$$

$$\textbf{per}\quad \omega \ll \omega_o \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \gg 1 \;\; \textbf{e} \;\; \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^4 \gg \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 1 \;\; \textbf{e} \;\; \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2$$

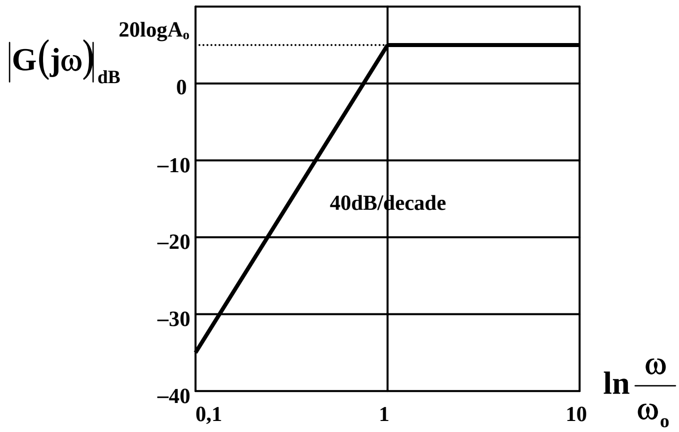
$$\textbf{trascurabili} \quad\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log A_o - 40\log\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right) \qquad \textbf{primo asintoto}$$

$$\textbf{per}\quad \omega \gg \omega_o \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \ll 1 \;\; \textbf{e} \;\; \left(\frac{1}{Q_o}\cdot\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 \ll 1 \quad\Rightarrow \textbf{trascurabili rispetto } 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log A_o \qquad \textbf{secondo asintoto}$$

Il primo asintoto è una retta con pendenza di $40\frac{dB}{decade}$ che interseca il secondo asintoto per $\frac{\omega}{\omega_o} = 1$; il secondo asintoto è una retta parallela all'asse delle ascisse.

Il diagramma asintotico di Bode (valido per $Q_o \geq 0,5$) è il seguente:



Quando risulta $Q_o = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la curva reale è il più possibile piatta e la pulsazione di taglio coincide con ω_o. Un quadripolo con $Q_o = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$, viene detto a **banda piatta** o di **Butterworth**.