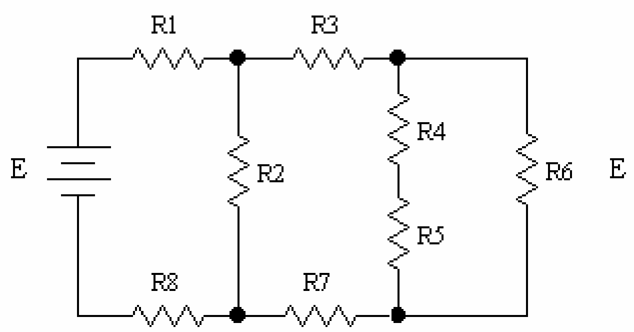
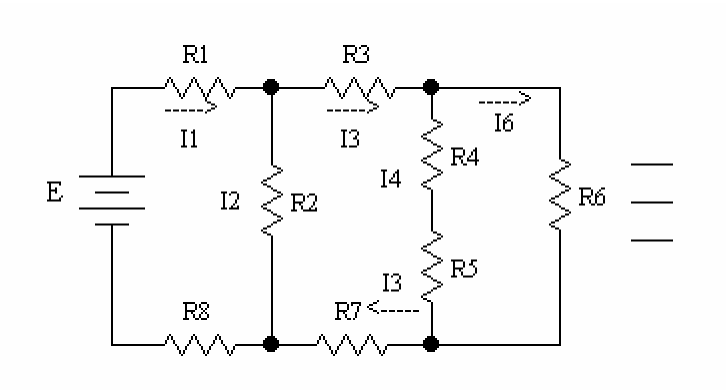
SOLUZIONE ESERCIZI

1.6.1. – Esercizio quasi svolto (serie, parallelo, legge di Ohm)

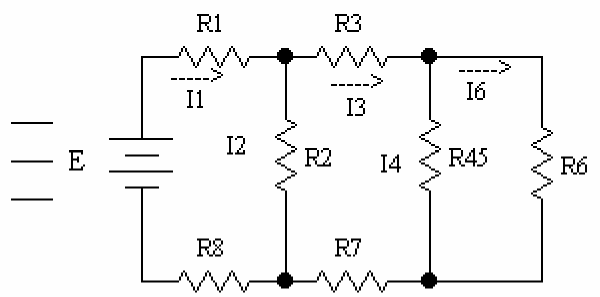


$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

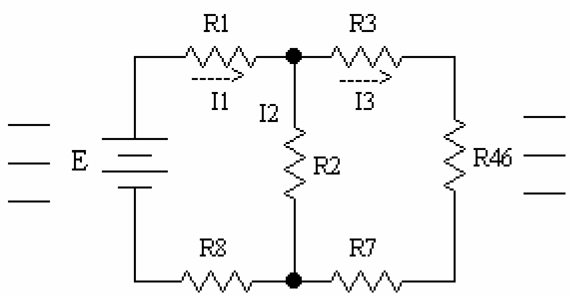
- Si segnano le correnti



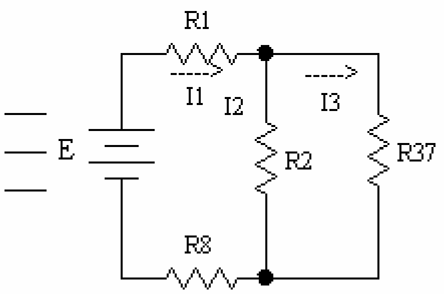
- Si disegnano i circuiti equivalenti



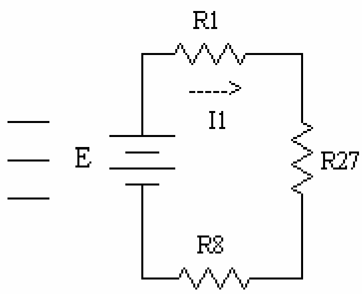
Circuito ridotto 1



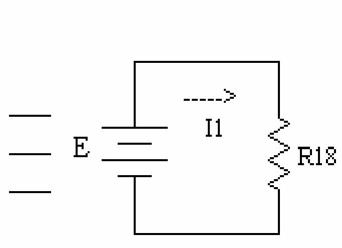
Circuito ridotto 2



Circuito ridotto 3



Circuito ridotto 4



Circuito ridotto 5

- Calcolo delle resistenze equivalenti

$$R_{45} = R_5 + R_5 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_6} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 1{,}5K\Omega$$

$$R_{37} = R_3 + R_{46} + R_7 = 2 \cdot 10^3 + 1{,}5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 7{,}5K\Omega$$

$$R_{27} = \frac{R_2 \cdot R_{37}}{R_2 + R_{37}} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 7{,}5 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3 + 7{,}5 \cdot 10^3} = 2{,}6K\Omega$$

$$R_{eq} = R_{18} = R_1 + R_{27} + R_8 = 2 \cdot 10^3 + 2{,}6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 8{,}6K\Omega$$

- Circuito ridotto 5 $\quad I_1 = \frac{E}{R_{18}} = \frac{12}{8{,}6 \cdot 10^3} = 1{,}395mA$

- Circuito ridotto 4 $\quad V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}395 \cdot 10^{-3} = 2{,}79V$

$$V_{27} = V_2 = V_{37} = R_{27} \cdot I_1 = 2{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1{,}395 \cdot 10^{-3} = 3{,}63V$$

$$V_8 = R_8 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}395 \cdot 10^{-3} = 5{,}58V$$

- Circuito ridotto 3 $\quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{3{,}63}{4 \cdot 10^3} = 0{,}908mA \quad ; \quad I_3 = \frac{V_{37}}{R_{37}} = \frac{3{,}63}{7{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}484mA$

- Circuito ridotto 2 $\quad V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}484 \cdot 10^{-3} = 0{,}968V$

$$V_{46} = V_{45} = V_6 = R_{46} \cdot I_3 = 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}484 \cdot 10^{-3} = 0{,}726V$$

$$V_7 = R_7 \cdot I_3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}484 \cdot 10^{-3} = 1{,}936V$$

- Circuito ridotto 1 $\quad I_4 = \frac{V_{45}}{R_{45}} = \frac{0{,}726}{6 \cdot 10^3} = 0{,}121mA \quad ; \quad I_6 = \frac{V_6}{R_6} = \frac{0{,}726}{2 \cdot 10^3} = 0{,}363mA$

- Circuito iniziale $\quad V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}121 \cdot 10^{-3} = 0{,}242V$

$$V_5 = R_5 \cdot I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}121 \cdot 10^{-3} = 0{,}484V$$

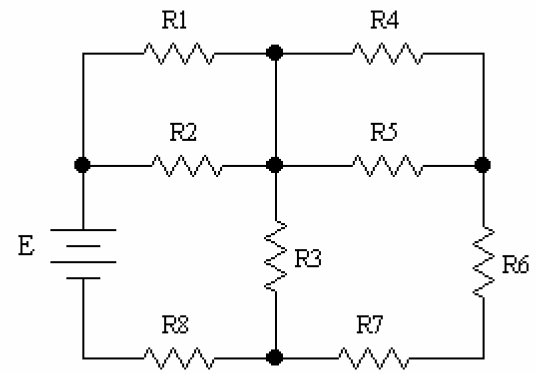
Riassumendo

$$R_{18} = 8{,}6K\Omega \;;\; I_1 = 1{,}395mA \;;\; I_2 = 0{,}908mA \;;\; I_3 = 0{,}4841mA \;;\; I_4 = 0{,}121mA$$

$$I_6 = 0{,}363mA \;;\; V_1 = 2{,}79V \;;\; V_2 = 3{,}63V \;;\; V_3 = 0{,}968V \;;\; V_4 = 0{,}242V \;;\; V_5 = 0{,}0{,}484V$$

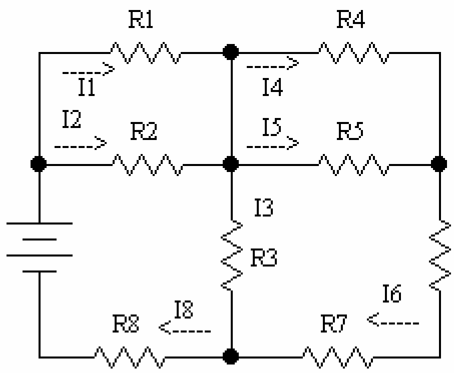
$$V_6 = 0{,}726V \;;\; V_7 = 1{,}936V \;;\; V_8 = 5{,}58V$$

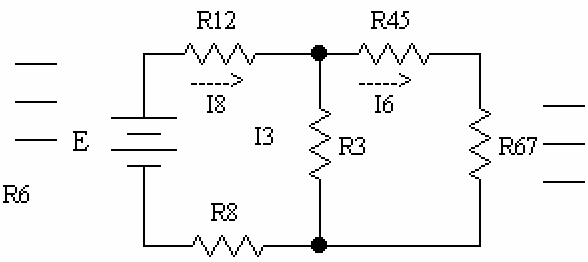
1.6.2. – Esercizio facilitato (serie, parallelo, legge di Ohm)



$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

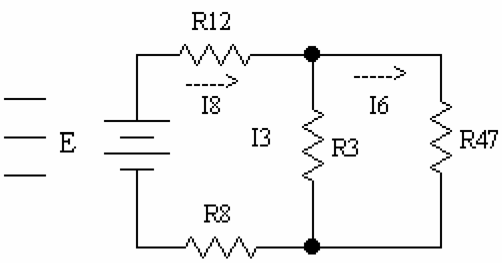
- Si segnano le correnti e si disegnano i circuiti equivalenti

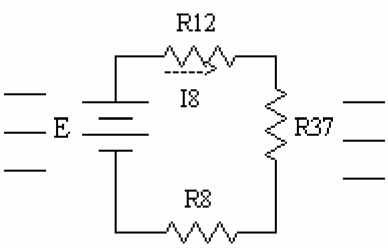


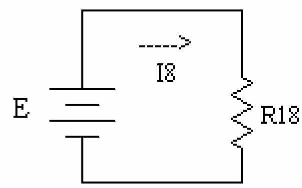


Circuito iniziale

Circuito ridotto 1







Circuito ridotto 2

Circuito ridotto 3

Circuito ridotto 4

- Calcolo delle resistenze equivalenti

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega \quad ; \quad R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega$$

$$R_{67} = R_6 + R_7 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{47} = R_{45} + R_{67} = 1{,}33 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3 = 7{,}33K\Omega$$

$$R_{37} = \frac{R_3 \cdot R_{47}}{R_3 + R_{47}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 7{,}33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 7{,}33 \cdot 10^3} = 1{,}57K\Omega$$

$$R_{eq} = R_{18} = R_{12} + R_{37} + R_8 = 1{,}33 \cdot 10^3 + 1{,}57 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6{,}9K\Omega$$

- Circuito ridotto 4 $\qquad I_8 = \dfrac{E}{R_{18}} = \dfrac{12}{6{,}9 \cdot 10^3} = 1{,}793mA$

- Circuito ridotto 3 $\qquad V_{12} = V_1 = V_2 = R_{12} \cdot I_8 = 1{,}33 \cdot 10^3 \cdot 1{,}793 \cdot 10^{-3} = 2{,}32V$

$$V_{37} = V_3 = V_{47} = R_{37} \cdot I_8 = 1{,}57 \cdot 10^3 \cdot 1{,}793 \cdot 10^{-3} = 2{,}73V$$

$$V_8 = R_8 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}793 \cdot 10^{-3} = 6{,}95V$$

- Circuito ridotto 2 $\qquad I_3 = \dfrac{V_3}{R_3} = \dfrac{2{,}73}{2 \cdot 10^3} = 1{,}365mA \;\; ; \;\; I_6 = \dfrac{V_{47}}{R_{47}} = \dfrac{2{,}73}{7{,}33 \cdot 10^3} = 0{,}372mA$

- Circuito ridotto 1 $\qquad V_{45} = V_4 = V_5 = R_{45} \cdot I_6 = 1{,}33 \cdot 10^3 \cdot 0{,}372 \cdot 10^{-3} = 0{,}496V$

$$V_6 = R_6 \cdot I_6 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}372 \cdot 10^{-3} = 0{,}744V \;\; ; \;\; V_7 = R_7 \cdot I_6 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}372 \cdot 10^{-3} = 1{,}488V$$

- Circuito iniziale $\qquad I_1 = \dfrac{V_1}{R_1} = \dfrac{2{,}32}{2 \cdot 10^3} = 1{,}16mA \;\; ; \;\; I_2 = \dfrac{V_2}{R_2} = \dfrac{2{,}32}{4 \cdot 10^3} = 0{,}58mA$

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{0{,}496}{2 \cdot 10^3} = 0{,}248mA \;\; ; \;\; I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{0{,}496}{4 \cdot 10^3} = 0{,}124mA$$

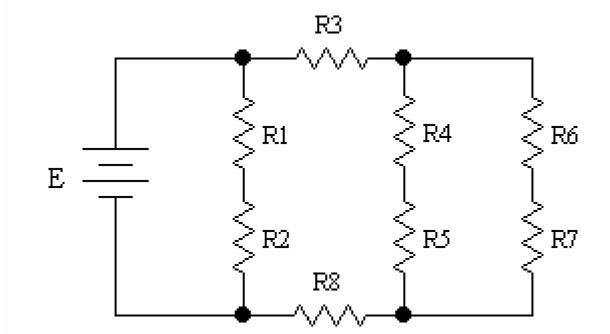
Riassumendo

$$R_{18} = 6{,}9K\Omega \;\; ; \;\; I_1 = 1{,}16mA \;\; ; \;\; I_2 = 0{,}58mA \;\; ; \;\; I_3 = 1{,}365mA \;\; ; \;\; I_4 = 0{,}248mA \;\; ; \;\; I_5 = 0{,}124mA$$

$$I_6 = 0{,}372mA \;\; ; \;\; I_8 = 1{,}379mA \;\; ; \;\; V_1 = V_2 = 2{,}32V \;\; ; \;\; V_3 = 2{,}73V \;\; ; \;\; V_4 = V_5 = 0{,}496V$$

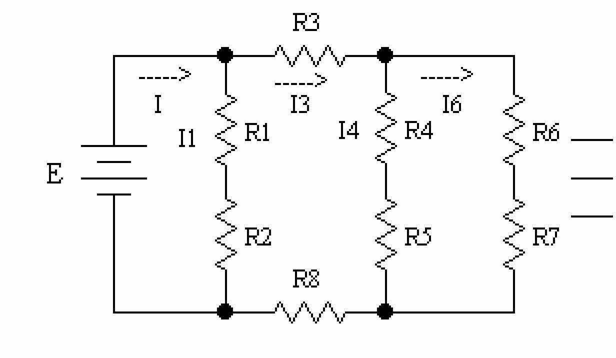
$$V_6 = 0{,}744V \;\; ; \;\; V_7 = 1{,}488V \;\; ; \;\; V_8 = 6{,}95V$$

1.6.3. – Esercizio (serie, parallelo, legge di Ohm)

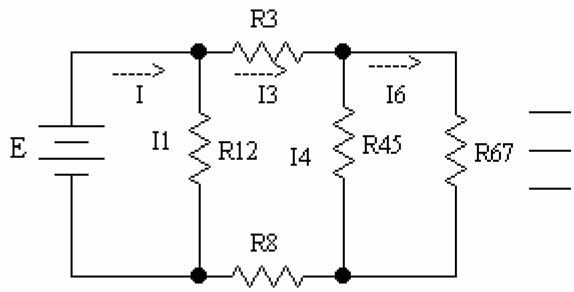


$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

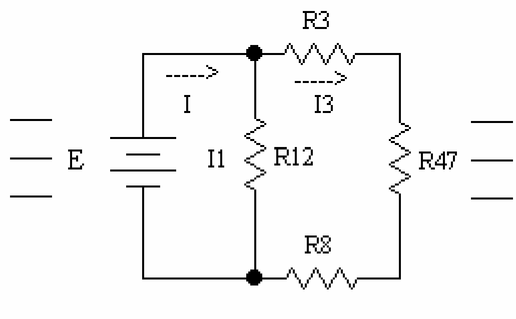
- Si segnano le correnti e si disegnano i circuiti equivalenti



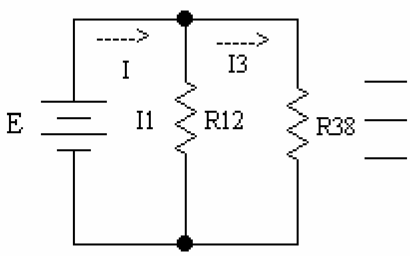
Circuito iniziale



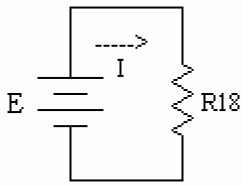
Circuito ridotto 1



Circuito ridotto 2



Circuito ridotto 3



Circuito ridotto 4

- Calcolo delle resistenze equivalenti

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{45} = R_4 + R_5 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega$$

$$R_{67} = R_6 + R_7 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{47} = \frac{R_{45} \cdot R_{67}}{R_{45} + R_{67}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 3K\Omega$$

$$R_{38} = R_3 + R_{47} + R_8 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 9K\Omega$$

$$R_{eq} = R_{18} = \frac{R_{12} \cdot R_{38}}{R_{12} + R_{38}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^3} = 3{,}6K\Omega$$

- Circuito ridotto 4 $\qquad I = \frac{E}{R_{18}} = \frac{12}{3{,}6 \cdot 10^3} = 3{,}33mA$

- Circuito ridotto 3 $\qquad I_1 = \frac{E}{R_{12}} = \frac{12}{6 \cdot 10^3} = 2mA \quad ; \quad I_3 = \frac{E}{R_{38}} = \frac{12}{9 \cdot 10^3} = 1{,}33mA$

- Circuito ridotto 2 $\qquad V_3 = R_3 \cdot I_8 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 2{,}67V$

$$V_{47} = V_{45} = V_{67} = R_{47} \cdot I_3 = 3 \cdot 10^3 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 4V$$

$$V_8 = R_8 \cdot I_3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 5{,}33V$$

- Circuito ridotto 1 $I_4 = \frac{V_{45}}{R_{45}} = \frac{4}{6 \cdot 10^3} = 0{,}67\text{mA}$; $I_6 = \frac{V_{67}}{R_{67}} = \frac{4}{6 \cdot 10^3} = 0{,}67\text{mA}$

- Circuito iniziale $V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4\text{V}$; $V_2 = R_2 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 8\text{V}$

$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}67 \cdot 10^{-3} = 1{,}34\text{V} \quad ; \quad V_5 = R_5 \cdot I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}67 \cdot 10^{-3} = 2{,}68\text{V}$$

$$V_6 = R_6 \cdot I_6 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}67 \cdot 10^{-3} = 1{,}34\text{V} \quad ; \quad V_7 = R_7 \cdot I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}67 \cdot 10^{-3} = 2{,}68\text{V}$$

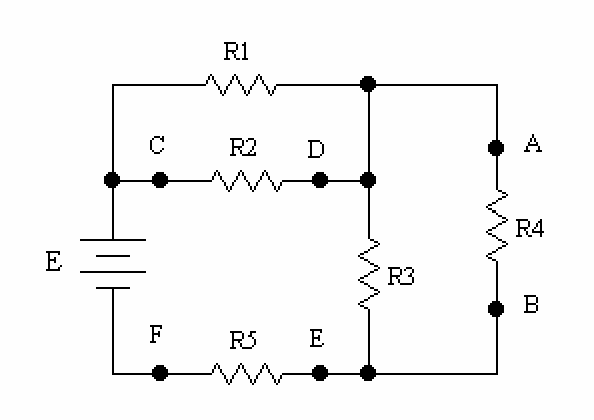
Riassumendo

$$R_{18} = 3{,}6\text{K}\Omega \; ; \; I_1 = 2\text{mA} \; ; \; I_3 = 1{,}33\text{mA} \; ; \; I_4 = 0{,}67\text{mA} \; ; \; I_6 = 0{,}67\text{mA} \; ; \; V_1 = 4\text{V} \; ; \; V_2 = 8\text{V}$$

$$V_3 = 2{,}57\text{V} \; ; \; V_4 = 1{,}34\text{V} \; ; \; V_5 = 2{,}68\text{V} \; ; \; V_6 = 1{,}34\text{V} \; ; \; V_7 = 2{,}68\text{V} \; ; \; V_8 = 5{,}33\text{V}$$

1.9.2. - Esercizio da svolgere (generatore equivalente)

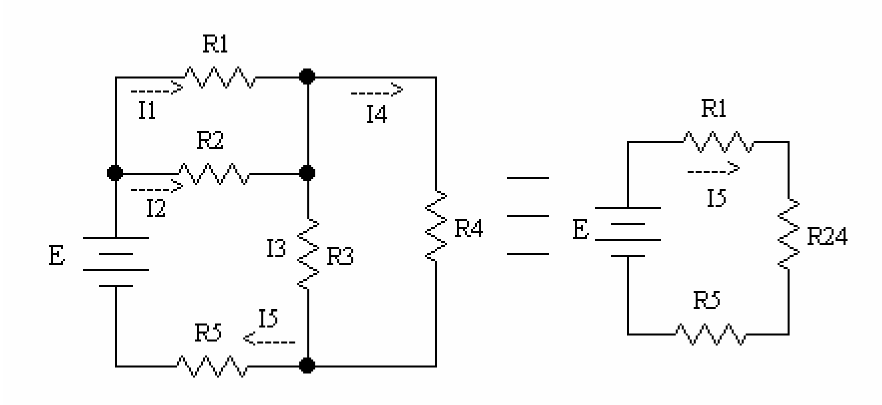
Dopo avere risolto il circuito, applicare il principio del generatore equivalente tra i punti A e B, C e D, E e F. dei circuiti equivalenti ottenuti, calcolare la corrente e la tensione per, rispettivamente, le resistenze R_4, R_2, R_5.



$$E = 12\text{V} \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2\text{K}\Omega$$

$$R_2 = R_5 = 4\text{K}\Omega \quad ; \quad R_4 = 3\text{K}\Omega$$

Risoluzione del circuito



$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33\text{K}\Omega \quad ; \quad R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1{,}2\text{K}\Omega$$

$$I_5 = \frac{E}{R_{12} + R_{34} + R_5} = \frac{12}{1{,}33 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}836\text{mA}$$

$$V_{12} = V_1 = V_2 = R_{12} \cdot I_5 = 1{,}33 \cdot 10^3 \cdot 1{,}836 \cdot 10^{-3} = 2{,}45\text{V}$$

$$V_{34} = V_{31} = V_4 = R_{34} \cdot I_5 = 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}836 \cdot 10^{-3} = 2{,}2\text{V}$$

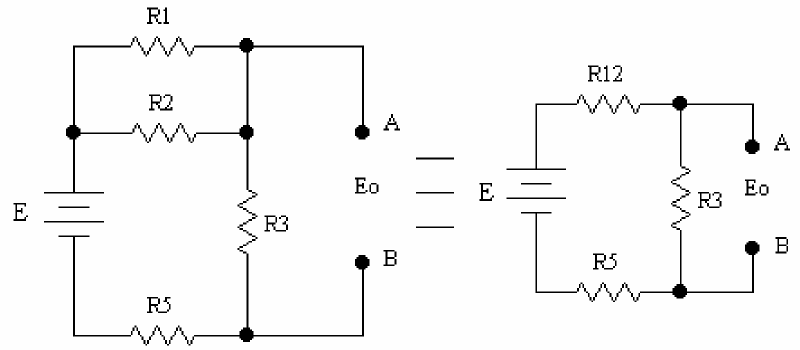
$$V_5 = R_5 \cdot I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}836 \cdot 10^{-3} = 7{,}35\text{V}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{2{,}45}{2 \cdot 10^3} = 1{,}225\text{mA} \quad ; \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{2{,}45}{4 \cdot 10^3} = 0{,}612\text{mA}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_4} = \frac{2{,}2}{2 \cdot 10^3} = 1{,}1\text{mA} \quad ; \quad I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{2{,}2}{3 \cdot 10^3} = 0{,}73\text{mA}$$

- **Si applica il principio del generatore equivalente tra i punti A e B**

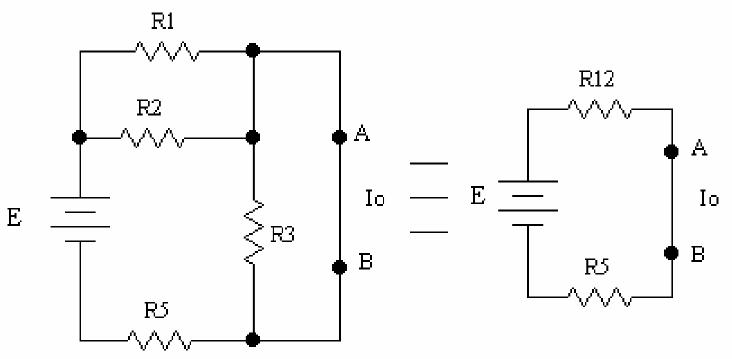
Calcolo di E_0



$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33\text{K}\Omega$$

$$E_o = \frac{R_3}{R_{12} + R_3 + R_5} E = \frac{2 \cdot 10^3}{1{,}33 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} 12 = 3{,}27\text{V}$$

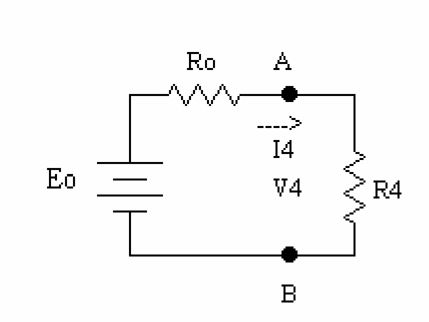
Calcolo di I_0



$$I_o = \frac{E}{R_{12} + R_5} = \frac{12}{1{,}33 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 2{,}25\text{mA}$$

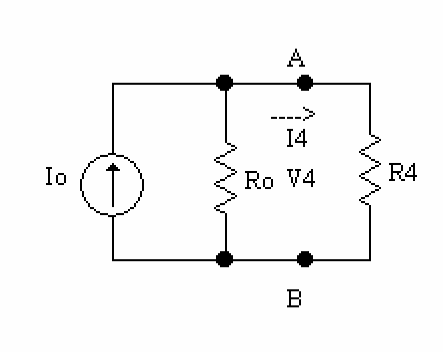
Calcolo di R_0 $\qquad R_o = \frac{E_o}{I_o} = \frac{3{,}27}{2{,}25 \cdot 10^{-3}} = 1{,}45\text{K}\Omega$

Si calcola, per i due circuiti equivalenti ottenuti, la tensione V_4 e la corrente I_4 e si confrontano i valori con quelli già calcolati.



$$I_4 = \frac{E_o}{R_o + R_4} = \frac{3{,}27}{1{,}45 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 0{,}73\text{mA}$$

$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}73 \cdot 10^{-3} = 2{,}2\text{V}$$



$$R_{o4} = \frac{R_o \cdot R_4}{R_0 + R_4} = \frac{1{,}45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{1{,}45 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 0{,}98\text{K}\Omega$$

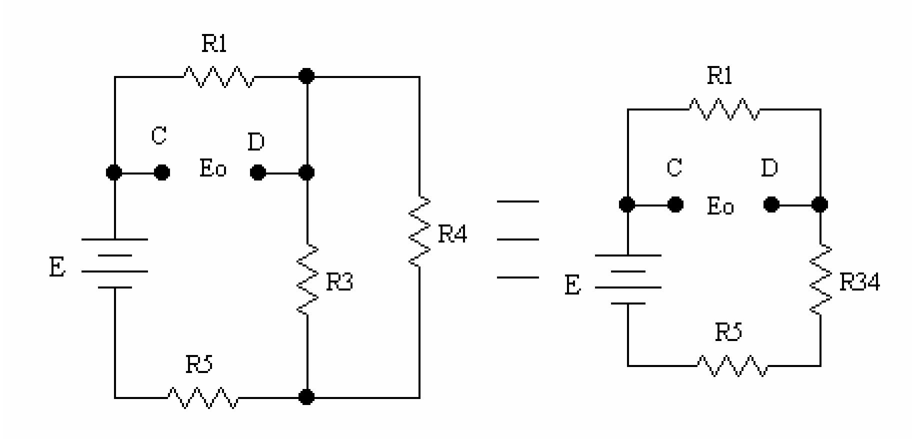
$$V_4 = R_{04} \cdot I_o = 0{,}98 \cdot 10^3 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-3} = 2{,}2\text{V}$$

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{2{,}2}{3 \cdot 10^3} = 0{,}73\text{mA}$$

I valori coincidono con quelli già calcolati.

- **Si applica il principio del generatore equivalente tra i punti C e D**

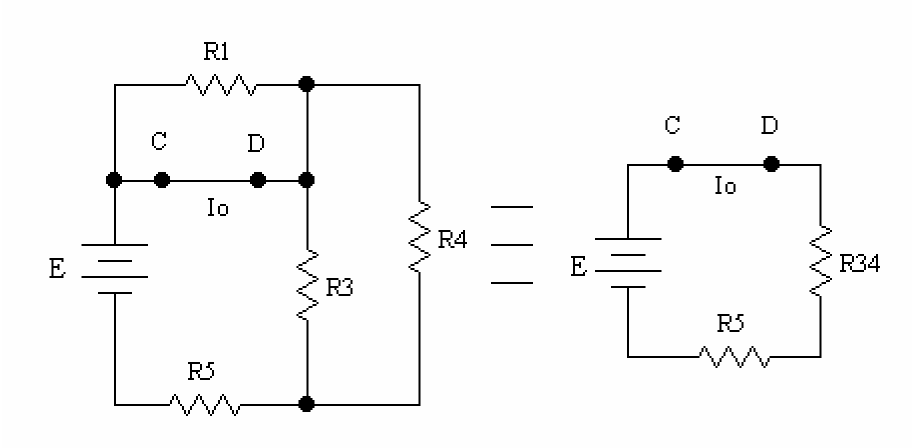
Calcolo di E_0



$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1{,}2\text{K}\Omega$$

$$E_o = \frac{R_1}{R_1 + R_{34} + R_5} E = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} 12 = 3{,}33V$$

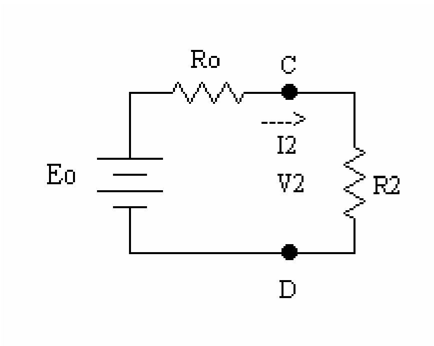
Calcolo di I_0



$$I_o = \frac{E}{R_{34} + R_5} = \frac{12}{1{,}2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 2{,}31mA$$

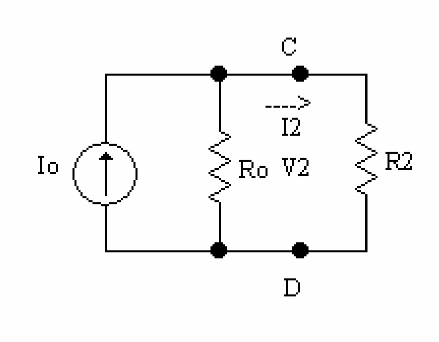
Calcolo di R_0 $$R_o = \frac{E_o}{I_o} = \frac{3{,}33}{2{,}31 \cdot 10^{-3}} = 1{,}44K\Omega$$

Si calcola, per i due circuiti equivalenti ottenuti, la tensione V_2 e la corrente I_2 e si confrontano i valori con quelli già calcolati.



$$I_2 = \frac{E_o}{R_o + R_2} = \frac{3{,}33}{1{,}44 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 0{,}612mA$$

$$V_2 = R_2 \cdot I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}612 \cdot 10^{-3} = 2{,}448V$$



$$R_{o2} = \frac{R_o \cdot R_2}{R_o + R_2} = \frac{1{,}44 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{1{,}44 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}06K\Omega$$

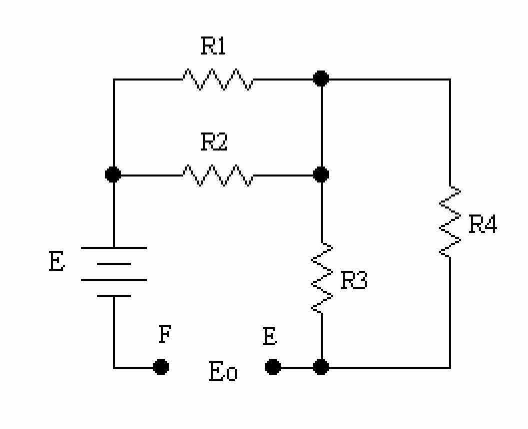
$$V_2 = R_{o2} \cdot I_o = 1{,}06 \cdot 10^3 \cdot 2{,}31 \cdot 10^{-3} = 2{,}446V$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{2{,}446}{4 \cdot 10^3} = 0{,}612mA$$

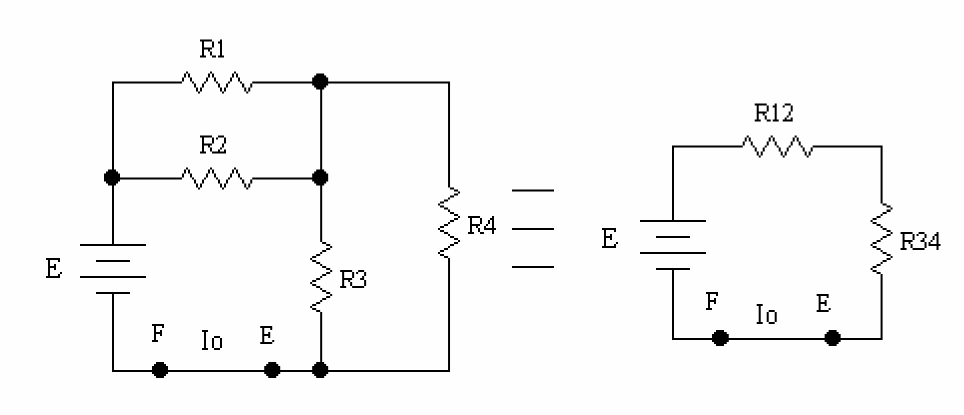
I valori coincidono con quelli già calcolati.

- **Si applica il principio del generatore equivalente tra i punti E e F**

Calcolo di E_0



$$E_o = E = 12V$$

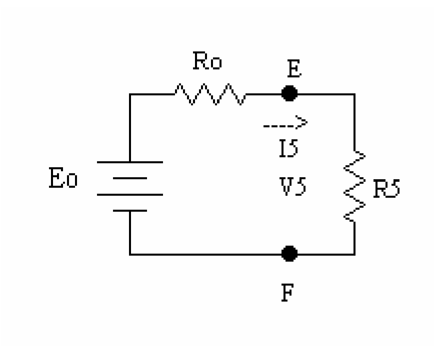


$$I_o = \frac{E}{R_{12} + R_{34}} = \frac{12}{1{,}33 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3} = 4{,}74mA$$

Calcolo di R_0

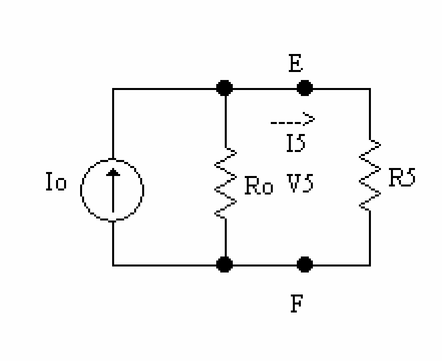
$$R_o = \frac{E_o}{I_o} = \frac{12}{4{,}74 \cdot 10^{-3}} = 2{,}53K\Omega$$

Si calcola, per i due circuiti equivalenti ottenuti, la tensione V_5 e la corrente I_5 e si confrontano i valori con quelli già calcolati.



$$I_5 = \frac{E_o}{R_o + R_5} = \frac{12}{2{,}53 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}837mA$$

$$V_5 = R_5 \cdot I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}83712 \cdot 10^{-3} = 7{,}35V$$



$$R_{o5} = \frac{R_o \cdot R_5}{R_o + R_5} = \frac{2{,}53 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2{,}53 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}55 K\Omega$$

$$V_5 = R_{o5} \cdot I_o = 1{,}55 \cdot 10^3 \cdot 4{,}74 \cdot 10^{-3} = 7{,}35 V$$

$$I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{7{,}35}{4 \cdot 10^3} = 1{,}836 mA$$

I valori coincidono con quelli già calcolati.

Riassumendo $I_1 = 1{,}225 mA \ ; \ I_2 = 0{,}612 mA \ ; \ I_3 = 1{,}1 mA \ ; \ I_4 = 0{,}73 mA \ ; \ I_5 = 1{,}836 mA$

$$V_1 = V_2 = 2{,}44 V \ ; \ V_3 = V_4 = 2{,}2 V \ ; \ V_5 = 7{,}35 V$$

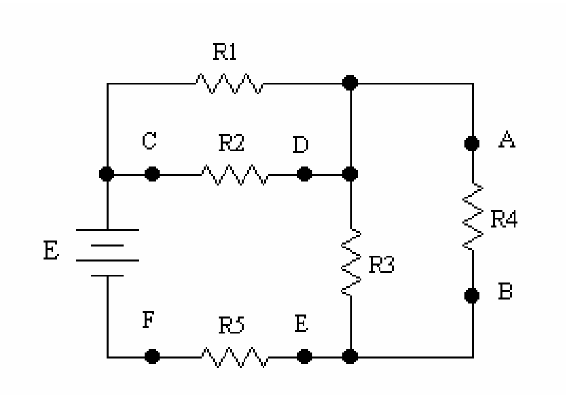
$$\text{punti AB}: \ E_o = 3{,}27 V \ ; \ I_o = 2{,}25 mA \ ; \ R_o = 1{,}45 K\Omega$$

$$\text{punti CD}: \ E_o = 3{,}33 V \ ; \ I_o = 2{,}31 mA \ ; \ R_o = 1{,}44 K\Omega$$

$$\text{punti EF}: \ E_o = 12 V \ ; \ I_o = 4{,}74 mA \ ; \ R_o = 2{,}53 K\Omega$$

1.10.2. - Esercizio da svolgere (Thèvenin, Norton)

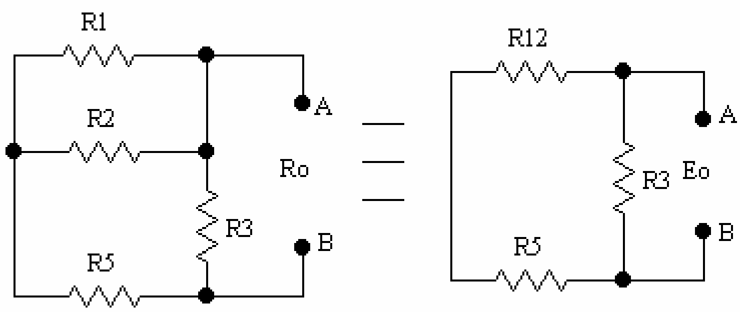
Trovare la resistenza equivalente R_o, secondo Thèvenin e Norton dell'esercizio di paragrafo 1.9.2.



$$E = 12 V \ ; \ R_1 = R_3 = 2 K\Omega$$

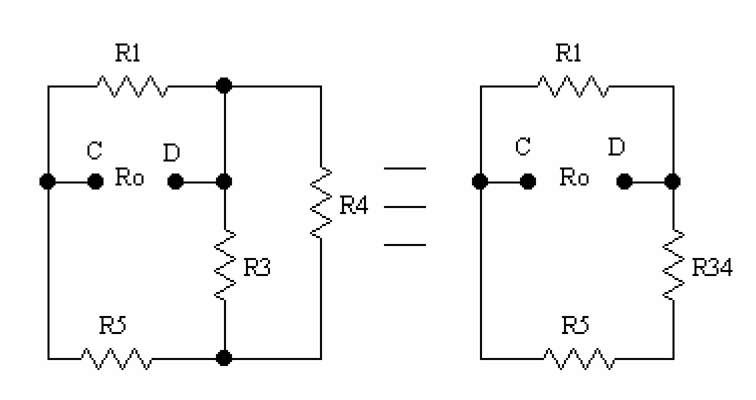
$$R_2 = R_5 = 4 K\Omega \ ; \ R_4 = 3 K\Omega$$

- **Punti A e B**



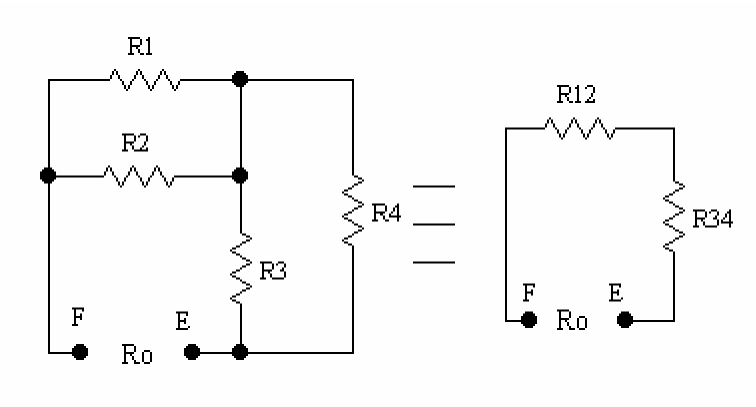
$$R_o = \frac{(R_{12} + R_5) \cdot R_3}{R_{12} + R_5 + R_3} = \frac{(1{,}33 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3) \cdot 2 \cdot 10^3}{1{,}33 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 1{,}45 K\Omega$$

- **Punti C e D**



$$R_o = \frac{\cdot R_1 \cdot (R_{34} + R_5)}{R_1 + R_{34} + R_5} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot (1{,}2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3)}{2 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}44 K\Omega$$

- **Punti E e F**



$$R_o = R_{12} + R_{34} =$$

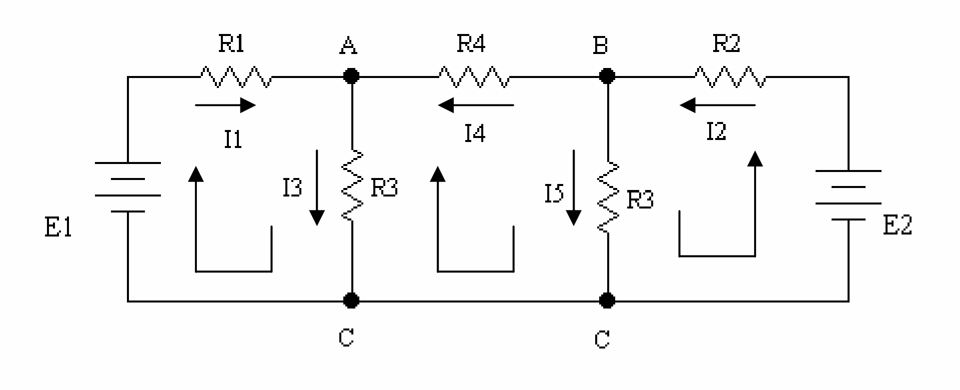
$$= 1{,}33 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3 = 2{,}53 K\Omega$$

Riassumendo: punti AB: $R_o = 1{,}45 K\Omega$; punti CD: $R_o = 1{,}44 K\Omega$; punti EF: $R_o = 2{,}53 K\Omega$

2.2.2. – Esercizi da svolgere (principi di Kirchhoff)

Risolvere i seguenti circuiti applicando i principi di Kirchhoff.

Esercizio parzialmente risolto



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 12V \quad ; \quad R_1 = R_4 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_3 = R_4 = 4K\Omega$$

Vi sono 5 rami, 2 nodi indipendenti e 3 maglie indipendenti.
Si scrivono 2 equazioni ai nodi **A** e **B** e 3 equazioni alle maglie **ACA**, **ABCA**, **BCB**:

$$A: \quad I_1 + I_4 = I_3 \qquad\qquad B: \quad I_2 = I_4 + I_5$$

$$ACA: \quad E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

$$ABCA: \quad 0 = -R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5$$

$$BCB: \quad E_2 = R_2 I_2 + R_5 I_5$$

$$\begin{cases} I_1 = I_3 - I_4 \\ I_2 = I_4 + I_5 \\ R_1(I_3 - I_4) + R_3 I_3 = E_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 I_3 + R_3 I_3 - R_1 I_4 = E_1 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_3) I_3 - R_1 I_4 = E_1 \\ -R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0 \\ R_2(I_4 + I_5) + R_5 I_5 = E_2 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_4 + R_2 I_5 + R_5 I_5 = E_2 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_4 + (R_2 + R_5) I_5 = E_2 \end{cases}$$

Si sostituiscono i valori delle resistenze e delle forze elettromotrici e si risolve il sistema costituito dalle ultime 3 equazioni.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^3 I_3 + 6 \cdot 10^3 I_4 = 8 \\ -4 \cdot 10^3 I_3 - 2 \cdot 10^3 I_4 + 4 \cdot 10^3 I_5 = 0 \\ 4 \cdot 10^3 I_4 + 8 \cdot 10^3 I_5 = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 \cdot 10^3 I_3 + 3 \cdot 10^3 I_4 = 4 \\ -2 I_3 - I_4 + 2 I_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_4 = -2 I_3 + 2 I_5 \\ 1 \cdot 10^3 I_4 + 2 \cdot 10^3 I_5 = 3 \end{cases}$$

Si sostituisce l’espressione di I_4 trovata nelle altre due:

$$\begin{cases} 1 \cdot 10^3 I_3 - 6 \cdot 10^3 I_3 + 6 \cdot 10^3 I_5 = 4 \\ -2 \cdot 10^3 I_3 + 2 \cdot 10^3 I_5 + 2 \cdot 10^3 I_5 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -5 \cdot 10^3 I_3 + 6 \cdot 10^3 I_5 = 4 \\ -2 \cdot 10^3 I_3 + 4 \cdot 10^3 I_5 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Si moltiplica la prima equazione per 2 e la seconda per 5 e si sottrae membro a membro:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -10 \cdot 10^3 I_3 + 12 \cdot 10^3 I_5 = 8 \\ \underline{-10 \cdot 10^3 I_3 + 20 \cdot 10^3 I_5 = 15} \end{cases}$$

$$8 \cdot 10^3 I_5 = 7 \quad \Rightarrow \quad I_5 = \frac{7}{8 \cdot 10^3} = 0{,}875 \text{mA}$$

Sostituendo nella seconda si calcola I_3:

$$-2 \cdot 10^3 I_3 + 4 \cdot 10^3 I_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{4 \cdot 10^3 I_5 - 3}{2 \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}875 \cdot 10^{-3} - 3}{2 \cdot 10^3} = 0{,}23 \text{mA}$$

Dalle equazioni ai nodi si calcolano I_4, I_1 e I_2:

$$I_4 = -2I_3 + 2I_5 = -2 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 0{,}875 \cdot 10^{-3} = 1{,}25\text{mA}$$

$$I_1 = I_3 - I_4 = 0{,}25 \cdot 10^{-3} - 1{,}25 \cdot 10^{-3} = -1\text{mA}$$

$$I_2 = I_4 + I_5 = 1{,}25 \cdot 10^{-3} + 0{,}875 \cdot 10^{-3} = 2{,}125\text{mA}$$

Il segno meno indica che il verso di I_1 è opposto a quello scelto.
Si calcolano le differenze di potenziale:

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 2\text{V} \qquad V_2 = R_2 \cdot I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 2{,}125 \cdot 10^{-3} = 8{,}5\text{V}$$

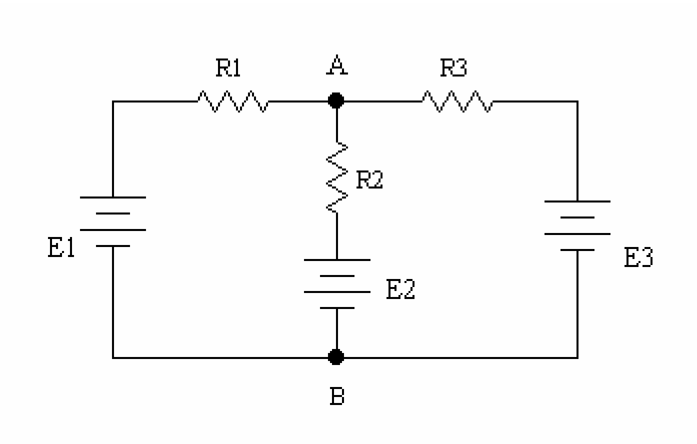
$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3} = 1\text{V} \qquad V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-3} = 2{,}5\text{V}$$

$$V_5 = R_5 \cdot I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}875 \cdot 10^{-3} = 3{,}5\text{V}$$

Riassumendo $I_1 = 1\text{mA}$; $I_2 = 2{,}125\text{mA}$; $I_3 = 0{,}25\text{mA}$; $I_4 = 1{,}25\text{mA}$; $I_5 = 0{,}875\text{mA}$

$V_1 = 2\text{V}$; $V_2 = 8{,}5\text{V}$; $V_3 = 1\text{V}$; $V_4 = 2{,}5\text{V}$; $V_5 = 3{,}5\text{V}$

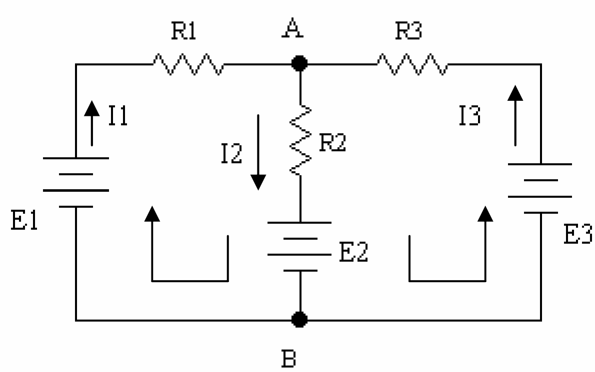
Esercizio facilitato (principi di Kirchhoff)



$E_1 = 8\text{V}$; $E_2 = 4\text{V}$; $E_3 = 12\text{V}$

$R_1 = R_3 = 2\text{K}\Omega$; $R_2 = 4\text{K}\Omega$

Nel circuito vi sono 3 rami, 1 nodo indipendente e 2 maglie indipendenti. Si scelgono i versi delle correnti, i versi di percorrenza e si scrive 1 equazione ai nodi (A) e 2 equazioni alle maglie.



$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 - I_3 \\ E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad R_1(I_2 - I_3) + R_2 I_2 = E_1 + E_2 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_3) I_2 - R_1 I_3 = E_1 + E_2 \\ E_2 + E_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 + E_3 \end{cases}$$

Si sostituiscono i valori delle resistenze e delle forze elettromotrici e si risolve il sistema costituito dalle ultime 2 equazioni.

$$\begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_2 - 2 \cdot 10^3 I_3 = 12 \\ 4 \cdot 10^3 I_2 + 2 \cdot 10^3 I_3 = 16 \end{cases}$$

$$10 \cdot 10^3 I_2 \qquad = 28 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{28}{10 \cdot 10^3} = 2{,}8\text{mA}$$

Sostituendo nella seconda si calcola I_3:

$$4 \cdot 10^3 I_2 + 2 \cdot 10^3 I_3 = 16 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{16 - 4 \cdot 10^3 I_2}{2 \cdot 10^3} = \frac{16 - 4 \cdot 10^3 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^3} = 2{,}4\text{mA}$$

Dall'equazioni al nodo A si calcola I_1: $\quad I_1 = I_2 - I_3 = 2{,}8 \cdot 10^{-3} - 2{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}4\text{mA}$

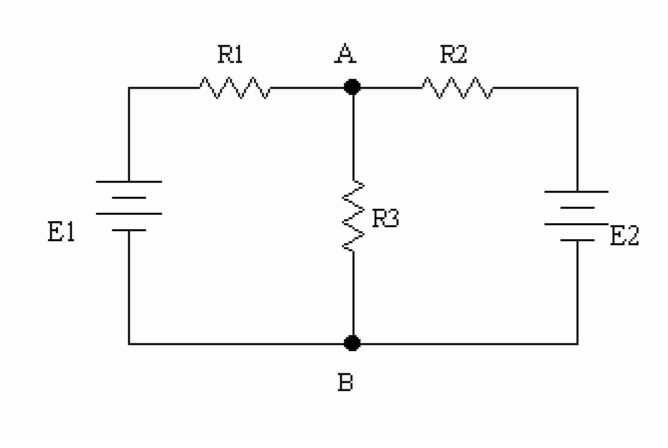
Si calcolano le differenze di potenziale:

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}8\text{V} \qquad V_2 = R_2 \cdot I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3} = 11{,}2\text{V}$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3} = 4{,}8\text{V}$$

Riassumendo $I_1 = 0{,}4\text{mA}$; $I_2 = 2{,}8\text{mA}$; $I_3 = 2{,}4\text{mA}$; $V_1 = 0{,}8\text{V}$; $V_2 = 11{,}2\text{V}$; $V_3 = 4{,}8\text{V}$

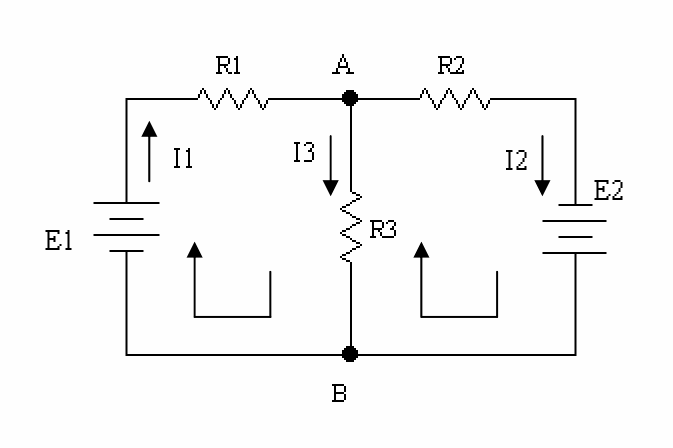
Esercizio (principi di Kirchhoff)



$E_1 = 8\text{V}$; $E_2 = 4\text{V}$

$R_1 = R_2 = 2\text{K}\Omega$; $R_3 = 4\text{K}\Omega$

Nel circuito vi sono 3 rami, 1 nodo indipendente e 2 maglie indipendenti. Si scelgono i versi delle correnti, i versi di percorrenza e si scrive 1 equazione ai nodi (A) e 2 equazioni alle maglie.



$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \quad \Rightarrow \quad R_1(I_2 + I_3) + R_3 I_3 = E_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 I_2 + (R_1 + R_3) I_3 = E_1 \\ E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Si sostituiscono i valori delle resistenze e delle forze elettromotrici e si risolve il sistema costituito dalle ultime 2 equazioni.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^3 I_2 + 6 \cdot 10^3 I_3 = 8 \\ \underline{2 \cdot 10^3 I_2 - 4 \cdot 10^3 I_3 = 4} \end{cases}$$

$$2 \cdot 10^3 I_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{4}{10 \cdot 10^3} = 0{,}4\text{mA}$$

Sostituendo nella seconda si calcola I_2:

$$2 \cdot 10^3 I_2 - 4 \cdot 10^3 I_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{4 + 4 \cdot 10^3 I_3}{2 \cdot 10^3} = \frac{2 + 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^3} = 2{,}8\text{mA}$$

Dall'equazioni al nodo A si calcola I_1: $\quad I_1 = I_2 + I_3 = 2{,}8 \cdot 10^{-3} + 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 3{,}2\text{mA}$

Si calcolano le differenze di potenziale:

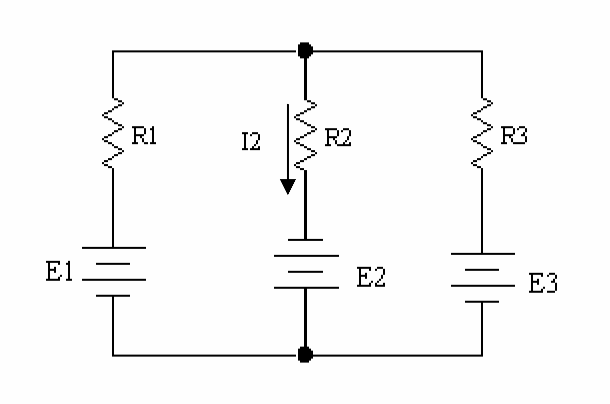
$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 6{,}4\text{V} \qquad V_2 = R_2 \cdot I_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3} = 5{,}6\text{V}$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 1{,}6\text{V}$$

Riassumendo $\quad I_1 = 3{,}2\text{mA}$; $I_2 = 2{,}8\text{mA}$; $I_3 = 0{,}4\text{mA}$; $V_1 = 6{,}4\text{V}$; $V_2 = 5{,}6\text{V}$; $V_3 = 1{,}6\text{V}$

2.3.2. – Esercizio da assegnare (sovrapposizione degli effetti)

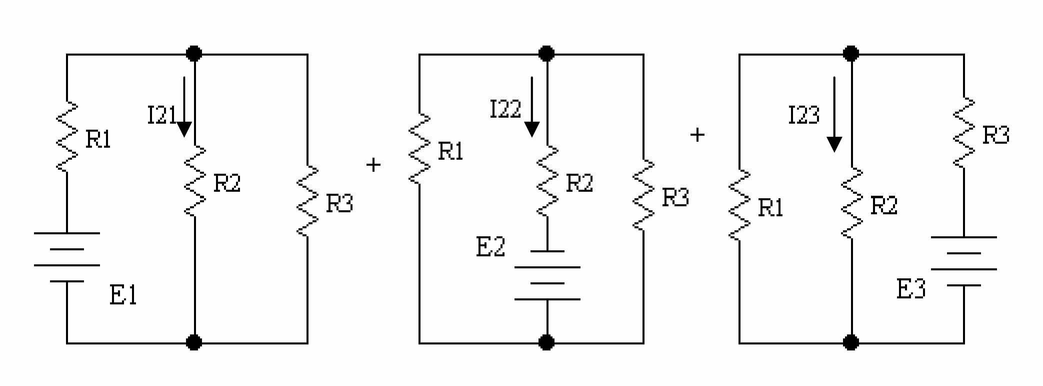
Del circuito di figura calcolare la corrente I_2.



$E_1 = 8V$; $E_2 = 4V$; $E_3 = 12V$

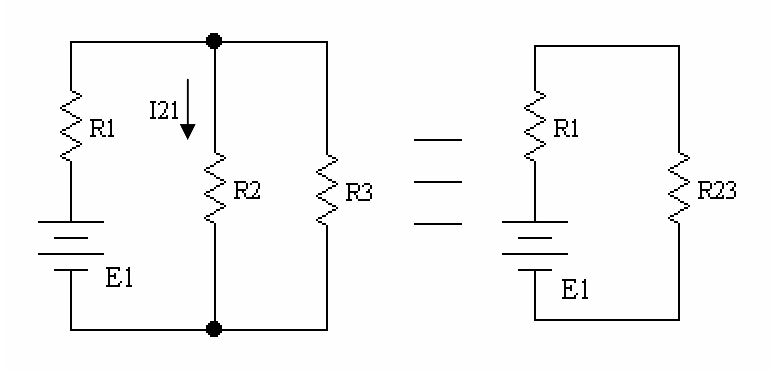
$R_1 = R_3 = 2K\Omega$; $R_2 = 4K\Omega$

Si assume quale verso positivo della corrente I_2 quello verso il basso.



$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23}$ è la somma algebrica dei contributi di E_1, E_2 ed E_3.

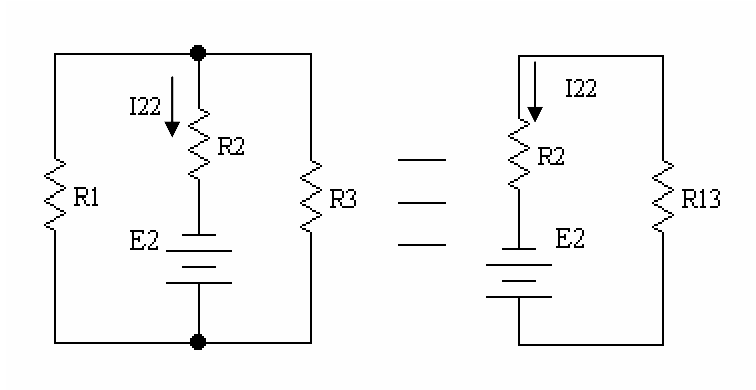
<u>Si cortocircuita E_2 e E_3 e si calcola il contributo I_{21} dovuto ad E_1</u>:



$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega \quad ; \quad V_{21} = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} E_1 = \frac{1{,}33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 1{,}33 \cdot 10^3} 8 = 3{,}2V$$

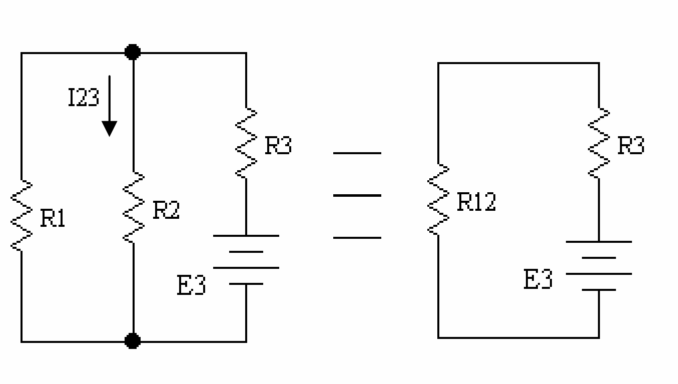
$$I_{21} = \frac{V_{21}}{R_2} = \frac{3{,}2}{4 \cdot 10^3} = 0{,}8mA$$

Si cortocircuita E_1 e E_3 e si calcola il contributo I_{22} dovuto ad E_2:



$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 1K\Omega \quad ; \quad I_{22} = \frac{E_2}{R_{13} + R_2} = \frac{4}{1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 0{,}8mA$$

Si cortocircuita E_1 e E_2 e si calcola il contributo I_{23} dovuto ad E_3:



$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega \quad ; \quad V_{23} = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} E_3 = \frac{1{,}33 \cdot 10^3}{1{,}33 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} 12 = 4{,}8V$$

$$I_{23} = \frac{V_{23}}{R_2} = \frac{4{,}8}{4 \cdot 10^3} = 1{,}2mA$$

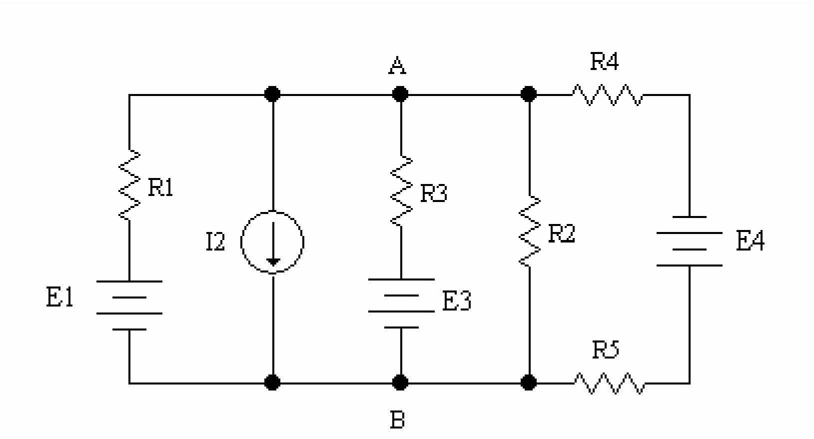
Si sommano i tre contributi, tutti con segno positivo, essendo tutti concordi col verso positivo scelto per I_2:

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} + 0{,}8 \cdot 10^{-3} + 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 2{,}8mA$$

2.4.2. – Esercizi da assegnare (Millman)

Risolvere applicando Millman

Esercizio N°1



$$E_1 = 12V \ ; \ E_3 = 8V \ ; \ E_4 = 4V \ ; \ I_2 = 2mA \ ; \ R_1 = R_3 = R_4 = 2K\Omega \ ; \ R_2 = R_5 = 4K\Omega$$

Si calcola V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - I_2 + \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_4}{R_4 + R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} = \frac{\frac{12}{2\cdot 10^3} - 2\cdot 10^{-3} + \frac{8}{2\cdot 10^3} - \frac{4}{2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^3}}{\frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{4\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^3}} =$$

$$= \frac{6\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-3} + 4\cdot 10^{-3} - 0{,}66\cdot 10^{-3}}{0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}66}\cdot 10^3 = 5{,}18V$$

I_1: poiché $V_{AB} < E_1 \quad \Rightarrow \quad I_1$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1} = \frac{12 - 5{,}18}{2\cdot 10^3} = 3{,}41mA \quad ; \quad V_1 = E_1 - V_{AB} = 12 - 5{,}18 = 6{,}82V$$

I_{R2}:

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{5{,}18}{4\cdot 10^3} = 1{,}295mA$$

I_3: poiché $V_{AB} < E_3 \quad \Rightarrow \quad I_3$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{E_3 - V_{AB}}{R_3} = \frac{8 - 5{,}18}{2\cdot 10^3} = 1{,}41mA \quad ; \quad V_3 = E_3 - V_{AB} = 8 - 5{,}18 = 2{,}82V$$

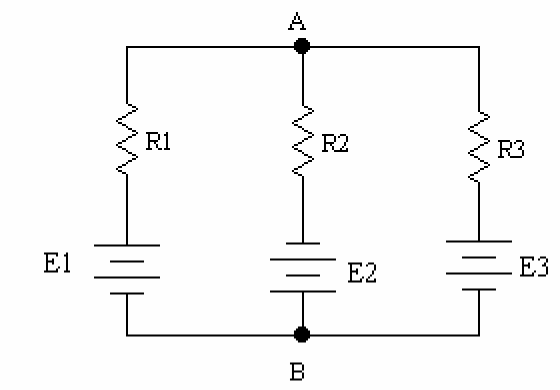
I_4: poiché $V_{AB} > E_4 \quad \Rightarrow \quad I_4$ entra nel ramo dal punto **A** ed esce dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_4 = \frac{V_{AB} + E_4}{R_4 + R_5} = \frac{5{,}18 + 4}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}53mA$$

$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}53 \cdot 10^{-3} = 3{,}06V \quad ; \quad V_5 = R_5 \cdot I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}53 \cdot 10^{-3} = 6{,}12V$$

Riassumendo $V_{AB} = 5{,}18V$; $I_1 = 3{,}41mA$; $I_{R2} = 1{,}295mA$; $I_3 = 1{,}41mA$; $I_4 = 1{,}53mA$

Esercizio N°2



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 4V \quad ; \quad E_3 = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = 4K\Omega$$

Si calcola V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{8}{2 \cdot 10^3} - \frac{4}{4 \cdot 10^3} + \frac{12}{2 \cdot 10^3}}{\frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3}} == \frac{4 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-3}}{0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}5} \cdot 10^3 = 7{,}2V$$

I_1: poiché $V_{AB} < E_1 \quad \Rightarrow \quad I_1$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1} = \frac{8 - 7{,}2}{2 \cdot 10^3} = 0{,}4mA \quad ; \quad V_1 = E_1 - V_{AB} = 8 - 7{,}2 = 0{,}8V$$

I_2: poiché $V_{AB} > E_2 \quad \Rightarrow \quad I_2$ entra nel ramo dal punto **A** ed esce dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{V_{AB} - E_2}{R_2} = \frac{7{,}2 + 4}{4 \cdot 10^3} = 2{,}8mA \quad ; \quad V_2 = V_{AB} + E_2 = 7{,}2 + 4 = 11{,}2V$$

I_3: poiché $V_{AB} < E_3 \quad \Rightarrow \quad I_3$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

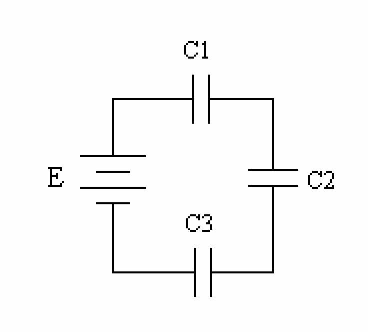
$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{E_3 - V_{AB}}{R_3} = \frac{12 - 7{,}2}{2 \cdot 10^3} = 2{,}4\text{mA} \quad ; \quad V_3 = E_3 - V_{AB} = 12 - 7{,}2 = 4{,}8\text{V}$$

Riassumendo $V_{AB} = 7{,}2\text{V}$; $I_1 = 0{,}4\text{mA}$; $I_2 = 2{,}8\text{mA}$; $I_3 = 2{,}4\text{mA}$

3.4.2. – Esercizi da assegnare (condensatori)

Risolvere i circuiti di figura.

Esercizio 1



$E = 12\text{V}$; $C_1 = 20\mu\text{F}$; $C_2 = 30\mu\text{F}$; $C_3 = 40\mu\text{F}$

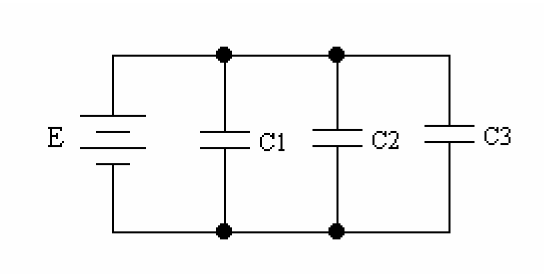
$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{30 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{40 \cdot 10^{-6}}} = 9{,}23\mu\text{F}$$

$$Q = C_{eq}E = 9{,}23 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 110{,}77\mu\text{C} \quad ; \quad V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{110{,}77 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 5{,}54\text{V}$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{110{,}77 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6}} = 3{,}69\text{V} \quad ; \quad V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{110{,}77 \cdot 10^{-6}}{40 \cdot 10^{-6}} = 2{,}77\text{V}$$

$$E = V_1 + V_2 + V_3 = 5{,}54 + 3{,}69 + 2{,}77 = 12 = E$$

Esercizio 2



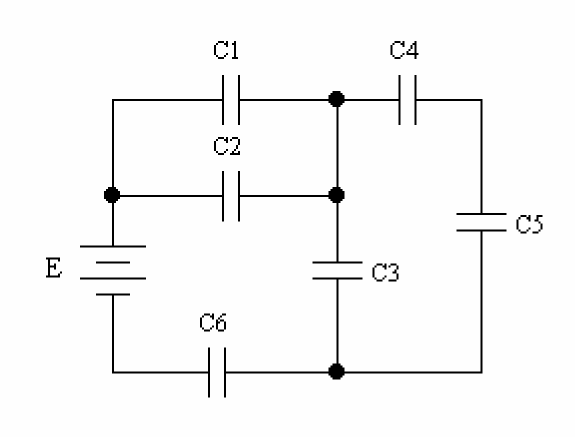
$E = 12\text{V}$; $C_1 = 20\mu\text{F}$; $C_2 = 30\mu\text{F}$; $C_3 = 40\mu\text{F}$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 20 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6} + 40 \cdot 10^{-6} = 90\mu\text{F} \quad ; \quad Q_1 = C_1E = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 240\mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2E = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 360\mu\text{C} \quad ; \quad Q_3 = C_3E = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 480\mu\text{C}$$

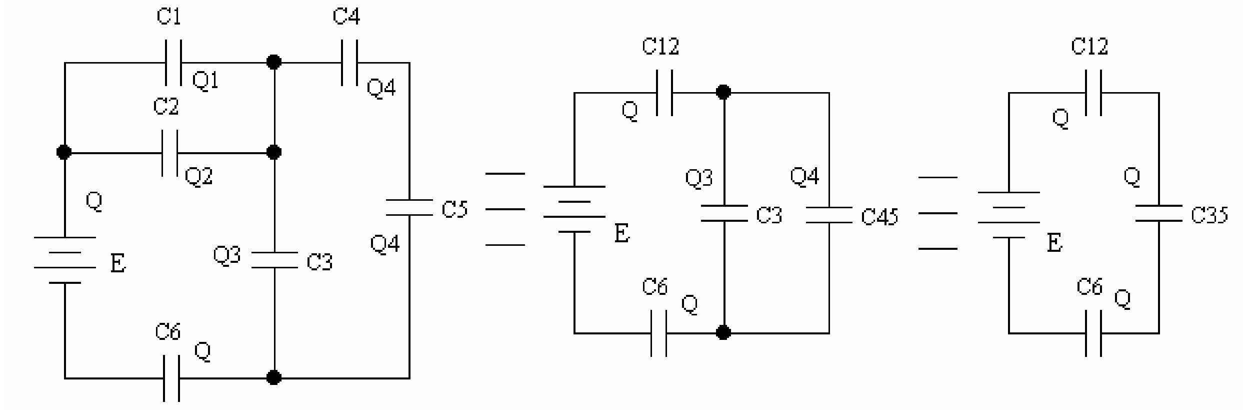
$$Q = C_{eq}E = 90 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 1080\mu C \ ; \ Q_1 + Q_2 + Q_3 = 240 \cdot 10^{-6} + 360 \cdot 10^{-6} + 480 \cdot 10^{-6} = 1080\mu C$$

Esercizio 3



$$E = 12V \ ; \quad C_1 = C_3 = C_5 = 20\mu F$$

$$C_2 = C_4 = C_6 = 40\mu F$$



$$C_{12} = C_1 + C_2 = 20 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6} = 50\mu F \quad ; \quad C_{45} = \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6}} = 12\mu F$$

$$C_{35} = C_3 + C_{45} = 20 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6} = 32\mu F$$

$$C_{16} = \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{35}} + \frac{1}{C_6}} = \frac{1}{\frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{32 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{30 \cdot 10^{-6}}} = 11{,}822\mu F$$

$$Q = C_{16}E = 11{,}822 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 141{,}87\mu C \quad ; \quad V_{12} = V_1 = V_2 = \frac{Q}{C_{12}} = \frac{141{,}87 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-6}} = 2{,}84V$$

$$V_{35} = V_3 = V_{45} = \frac{Q}{C_{35}} = \frac{141{,}87 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-6}} = 4{,}43V \quad ; \quad V_6 = \frac{Q}{C_6} = \frac{141{,}87 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6}} = 4{,}73V$$

$$Q_3 = C_3 V_3 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}43 = 88{,}6\mu C \quad ; \quad Q_4 = C_{45} V_{45} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}43 = 53{,}16\mu C$$

$$Q_1 = C_1 V_1 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}84 = 56{,}8\mu C \quad ; \quad Q_2 = C_2 V_2 = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}84 = 85{,}2\mu C$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{53{,}16 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^{-6}} = 1{,}772V \quad ; \quad V_5 = \frac{Q_4}{C_5} = \frac{53{,}16 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 2{,}658V$$

$$V_{12} + V_{35} + V_6 = 2{,}84 + 4{,}43 + 4{,}73 = 12 = E$$

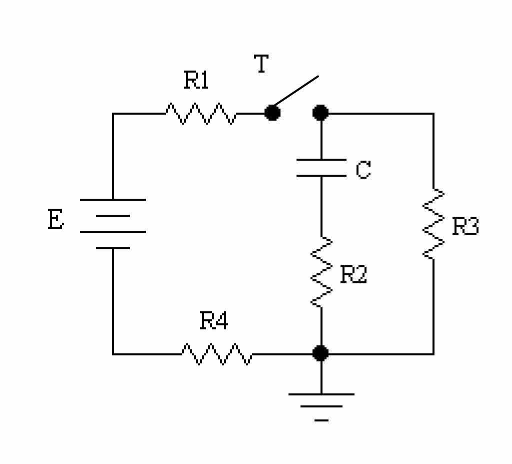
Riassumendo $C_{eq} = 11{,}822\mu F$; $Q = 141{,}87\mu C$; $Q_1 = 56{,}8\mu C$; $Q_2 = 85{,}2\mu C$; $Q_3 = 88{,}6\mu C$

$Q_4 = 53{,}16\mu C$; $V_1 = V_2 = 2{,}84V$; $V_3 = 4{,}43V$; $V_4 = 1{,}772V$; $V_5 = 2{,}658V$; $V_6 = 4{,}73V$

3.5.4. – Esercizi da assegnare (transitori)

Esercizio 1

Del circuito di figura calcolare l'equazione di carica della capacità, supponendola inizialmente scarica, allorché viene chiuso il tasto T. Dopo un tempo superiore a $5\tau_C$ (τ_C è la costante di carica della capacità) si riapre il tasto T; calcolare l'equazione di scarica della capacità.

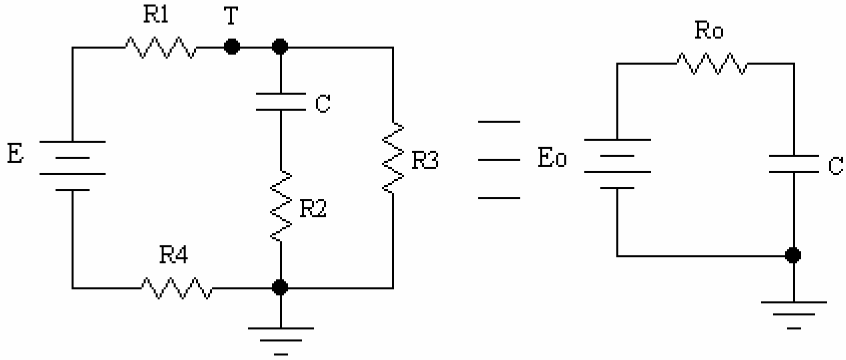


$E = 10V$; $C = 10\mu F$

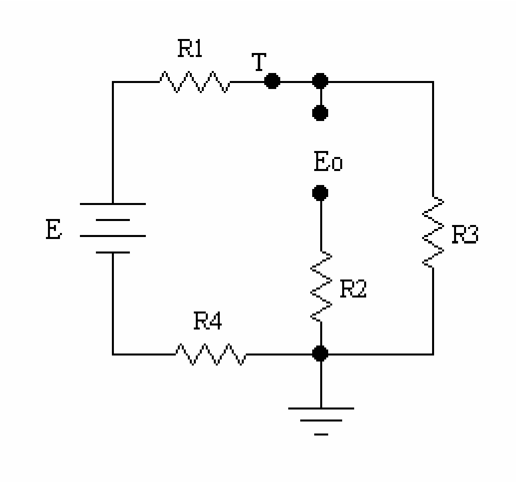
$R_1 = R_2 = 2K\Omega$

$R_3 = R_4 = 4K\Omega$

Supponendo la capacità inizialmente scarica, si chiude il tasto T. Si applica il teorema di Thèvenin ai capi della capacità e si riduce il circuito, visto dalla capacità, ad un generatore di tensione.



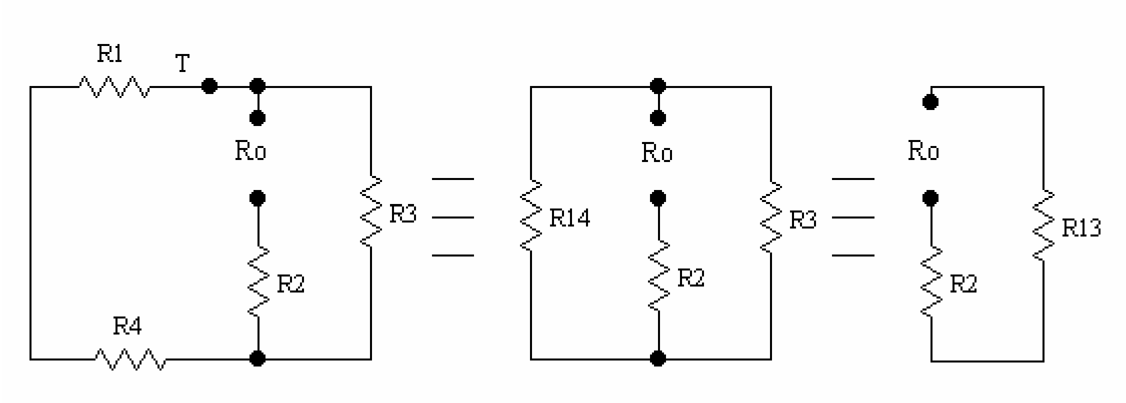
Calcolo di E_o



$$E_o = \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4} E =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} \cdot 10 = 4V$$

Calcolo di R_o



$$R_{14} = R_1 + R_4 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{13} = \frac{R_{14} \cdot R_3}{R_{14} + R_3} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 2{,}4K\Omega$$

$$R_o = R_2 + R_{13} = 2 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^3 = 4{,}4K\Omega$$

Equazione di carica

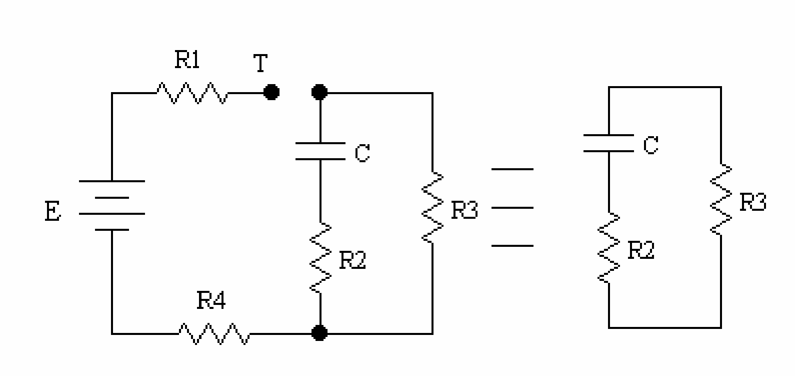
$$\tau_C = R_o C = 4{,}4 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 44ms$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} t = 5\tau_C \\ V_f = E_o = 4V \end{cases} ; \quad v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = E_o - E_o e^{-\frac{t}{\tau_C}} = E_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

Sostituendo i valori, si ha:

$$v_c(t) = 4\left(1 - e^{-\frac{t}{44 \cdot 10^{-3}}}\right) = 4\left(1 - e^{-22{,}73t}\right)V$$

Una volta esaurito il transitorio, ossia quando $v_c = E_o = 4V$, si apre l’interruttore T. Inizia un transitorio di scarica.



La capacità, dal valore E_o, si scarica, attraverso la resistenza equivalente $R_2 + R_3$, fino a zero.

$$\tau_S = R_{eq}C = (R_2 + R_3)C = \left(2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3\right) \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 60\text{ms}$$

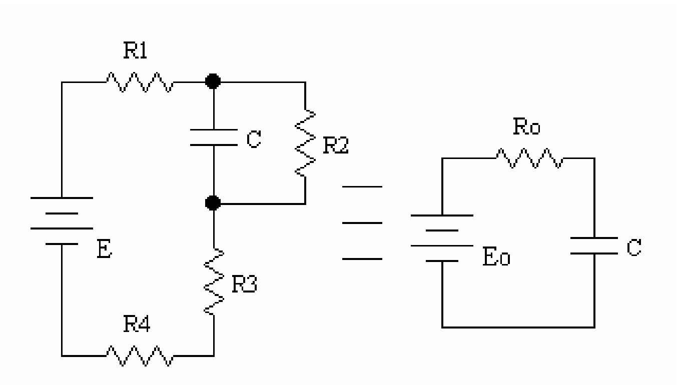
$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = E_o = 4\text{V} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} t = 5\tau_S \\ V_f = 0 \end{cases} \quad ; \quad v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = E_o e^{-\frac{t}{\tau_S}}$$

Sostituendo i valori, si ha: $\quad v_c(t) = 4e^{-\frac{t}{60 \cdot 10^{-3}}} = 4e^{-16,67t}\text{V}$

Esercizio 2

Dopo avere ridotto il circuito applicando il teorema di Thèvenin ai capi del condensatore, calcolare:

1. la tensione ai capi del condensatore, esauriti i transitori.
2. La costante di tempo τ del circuito.
3. Il tempo minimo dopo il quale si può considerare esaurito il transitorio.
4. Disegnare il grafico, nel piano V-t, della curva di carica V_C del condensatore in funzione del tempo.
5. Calcolare la differenza di potenziale e la corrente per ogni resistenza.
6. Si inserisce nel circuito un voltmetro per misurare la differenza di potenziale a regime (esauriti i transitori) ai capi del condensatore. Considerando il voltmetro reale, esso è schematizzabile come un voltmetro ideale con in serie una resistenza R_{iv} che rappresenta la resistenza interna del voltmetro. Inserisce lo strumento, equivale ad inserire nel circuito una resistenza addizionale, per cui la tensione misurata non coincide esattamente con quella calcolata senza inserire il voltmetro. Utilizzando il valore fornito per R_{iv}, calcolare il valore che si leggerà sul voltmetro.

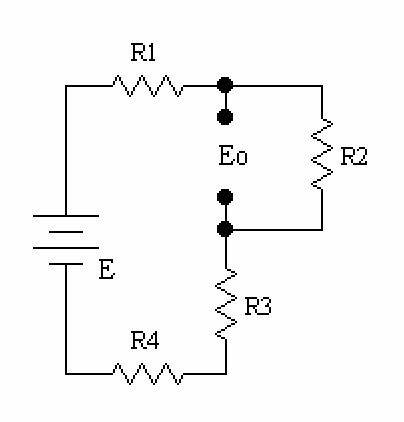


$E = 10\text{V} \quad ; \quad C = 10\mu\text{F}$

$R_1 = R_2 = 2\text{K}\Omega$

$R_3 = R_4 = 4\text{K}\Omega$

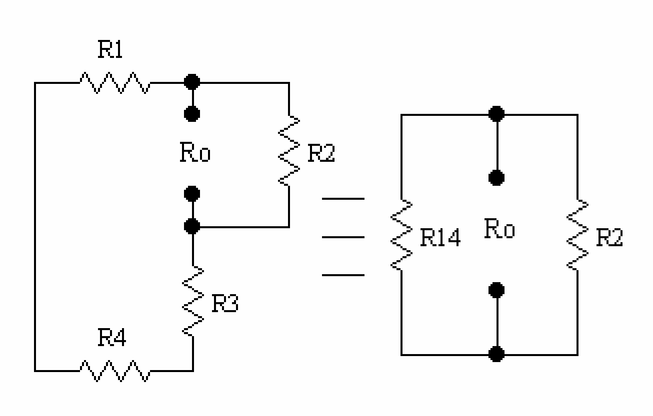
Calcolo di Eo



$$E_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} E =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} \cdot 10 = 1{,}67\mathrm{V}$$

Calcolo di Ro



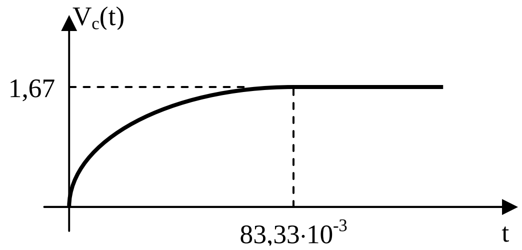
$$R_{14} = R_1 + R_3 + R_4 =$$

$$= 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 10\mathrm{K}\Omega$$

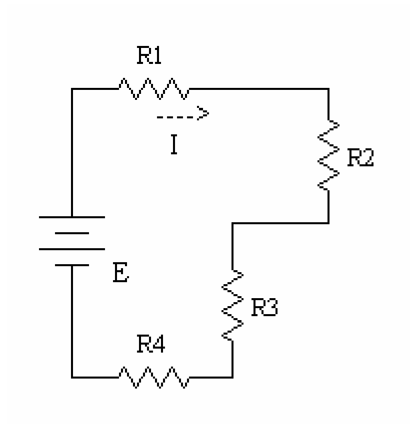
$$R_o = \frac{R_{14} R_2}{R_{14} + R_2} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 1{,}67\mathrm{K}\Omega$$

$$V_{Cf} = E_o = 1{,}67\mathrm{V} \quad ; \quad \tau = R_o C = 1{,}67 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 16{,}7\mathrm{ms} \quad ; \quad \Delta t_C = 5\tau = 5 \cdot 16{,}7 \cdot 10^{-3} = 83{,}33\mathrm{ms}$$



Esaurito il transitorio, la capacità equivale ad un circuito aperto. Per calcolare, in tale caso, le tensioni e le correnti nelle resistenze, si ridisegna il circuito omettendo la capacità C.

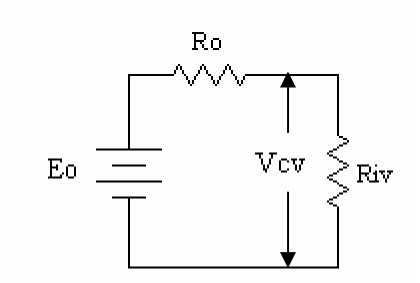


$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{10}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 0{,}833\text{mA}$$

$$V_1 = R_1 \cdot I = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}833 \cdot 10^{-3} = 1{,}67\text{V} \quad ; \quad V_2 = R_1 \cdot I = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}833 \cdot 10^{-3} = 1{,}67\text{V}$$

$$V_3 = R_3 \cdot I = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}833 \cdot 10^{-3} = 3{,}33\text{V} \quad ; \quad V_4 = R_4 \cdot I = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}833 \cdot 10^{-3} = 3{,}33\text{V}$$

Inserire un voltmetro, con resistenza interna $R_{iv} = 100\text{K}\Omega$, ai capi della capacità C equivale ad inserire nel circuito una resistenza R_{iv}, che altera i valori di tensione e di corrente dell'intero circuito, e, quindi, anche il valore di tensione sulla capacità.
Al fine di calcolare il valore letto sul voltmetro, si ridisegna il circuito mettendo al posto della capacità C la resistenza R_{iv} e calcolando la caduta di tensione su di essa. Analogamente, per tale scopo si può utilizzare il circuito equivalente calcolato con Thèvenin, mettendo al posto della capacità (circuito aperto) la resistenza R_{iv}.



$$V_{CV} = \frac{R_{iv}}{R_o + R_{iv}} E_o == \frac{100 \cdot 10^3}{1{,}67 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10^3} \cdot 1{,}67 = 1{,}642\text{V}$$

Il valore misurato risulta leggermente più piccolo del valore reale.

INDICE