METODO DELLE CORRENTI CICLICHE O DI MAXWELL
TENSIONE TRA DUE PUNTI DI UNA RETE. LEGGE DI OHM GENERALIZZATA
METODO DEL POTENZIALE AI NODI
TRASFORMAZIONE STELLA-TRIANGOLO E TRIANGOLO-STELLA

I principi di Kirchhoff consentono di risolvere una qualunque rete lineare, scrivendo r equazioni linearmente indipendenti (ai nodi indipendenti e alle maglie indipendenti), quante sono le correnti incognite (r = numero dei rami). Al fine di ridurre il numero di equazioni del sistema da risolvere, si sono sviluppati altri metodi equivalenti che considerano un numero ridotto di equazioni.

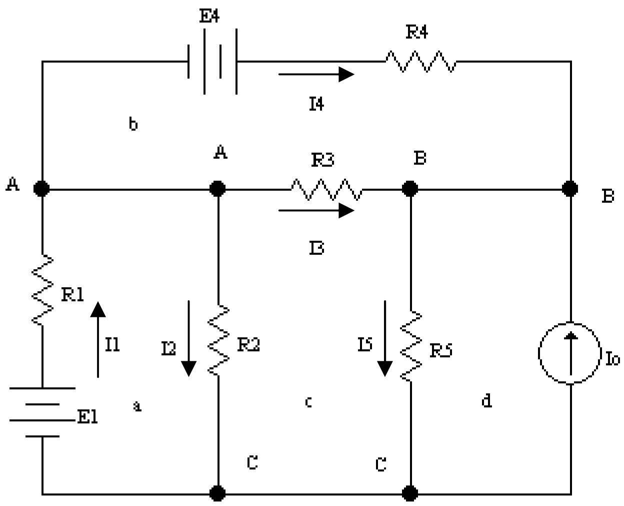
METODO DELLE CORRENTI CICLICHE O DI MAXWELL

Il metodo delle correnti cicliche (o di Maxwell) considera solamente le equazioni alle maglie indipendenti contigue [m = r – (n – 1)], con m correnti incognite fittizie, in funzione delle quali si ricavano, poi, le r correnti incognite reali.
Si procede nel seguente modo:

1. si considerano le m maglie indipendenti contigue e si attribuisce ad ogni maglia adiacente una corrente ciclica fittizia di maglia il cui verso coincide con quello di percorrenza scelto. Si hanno così tante correnti fittizie incognite quante sono le maglie indipendenti. Si esplicitano le correnti nei rami in funzione delle correnti cicliche.
2. si scrivono le equazioni alle maglie in funzione delle suddette correnti fittizie. Se nella maglia è presente un generatore di corrente è inutile scrivere l'equazione a tale maglia in quanto la corrente ciclica coincide con la corrente del generatore di corrente.
3. si risolve il sistema e si ricavano le m correnti fittizie incognite.
4. si calcola la corrente reale in ogni ramo calcolando la somma algebrica delle correnti fittizie su quel ramo si sommano se hanno lo stesso verso, si sottraggono se hanno verso opposto).

È bene attribuire lo stesso verso (orario o antiorario) a tutte le correnti fittizie.

Ad esempio, si risolve il circuito di figura.



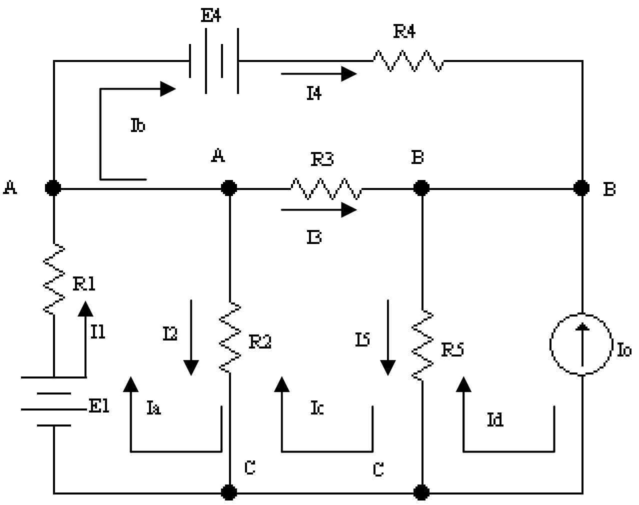
$E_1 = 6V$; $E_4 = 4V$; $I_o = 2mA$

$R_1 = R_5 = 2k\Omega$; $R_4 = 1k\Omega$

$R_2 = R_3 = 4k\Omega$

Vi sono 3 nodi e 6 rami; le maglie indipendenti sono m = 4. le maglie contigue sono individuate dalle lettere a, b, c, d.

1. Si attribuisce a ciascuna maglia adiacente una corrente ciclica fittizia in senso orario: I_a, I_b, I_c, I_d. si esplicitano le correnti nei rami (I_1, I_2, I_3, I_4 I_5) in funzione delle correnti cicliche.



$I_1 = I_a$

$I_2 = I_a - I_c$

$I_3 = I_c - I_b$

$I_4 = I_b$

$I_5 = I_c - I_d = I_c + I_o$

Poiché nella maglia d è presente un generatore di corrente, si ha: I_d = - I_o = 2mA. Restano, dunque, tre incognite: I_a , I_b , I_c.

2. Si scrivono le equazioni alle maglie a, b, c.

$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad R_1 I_a + R_2 (I_a - I_c) = E_1 \\ \text{maglia} \quad b \quad R_3 (I_b - I_c) + R_4 I_b = E_4 \\ \text{maglia} \quad a \quad R_2 (I_c - I_a) + R_3 (I_c - I_b) + R_5 (I_c - I_o) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 I_a + R_2 I_a - R_2 I_c = E_1 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2) I_a - R_2 I_c = E_1 \\ R_3 I_b - R_3 I_c + R_4 I_b = E_4 \quad \Rightarrow \quad (R_3 + R_4) I_b - R_3 I_c = E_4 \\ R_2 I_c - R_2 I_a + R_3 I_c - R_3 I_b + R_5 I_c - R_5 I_o = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_2 I_a - R_3 I_b + (R_2 + R_3 + R_5) I_c = -R_5 I_o \end{cases}$$

3. Si sostituiscono i valori noti e si risolve il sistema.

$$\begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_c = 6 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_c = 3 \\ 5 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 4 \\ -4 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_b + 10 \cdot 10^3 I_c = -4 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 10^3 I_a + 2 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 I_c = 2 \end{cases}$$

Dalla prima non semplificata si sottrae la terza moltiplicata per 3.

$$\begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 4 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ \underline{6 \cdot 10^3 I_a + 6 \cdot 10^3 I_b - 15 \cdot 10^3 I_c = 6} \end{cases}$$

$$-6 \cdot 10^3 I_b + 11 \cdot 10^3 I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad -6 \cdot I_b + 11 \cdot I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{6}{11} I_b$$

Si sostituisce nella seconda e si ricava I_b e poi I_c.

$$5 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{6}{11} I_b \right) = 4 \quad \Rightarrow \quad 55 \cdot 10^3 I_b - 24 \cdot 10^3 \cdot I_b = 44 \quad \Rightarrow \quad 31 \cdot 10^3 I_b = 44 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_b = \frac{44}{31 \cdot 10^3} = 1{,}42\text{mA} \quad \Rightarrow \quad I_c = \frac{6}{11} I_b = \frac{6}{11} \cdot 1{,}42 \cdot 10^{-3} = 0{,}77\text{mA}$$

Sostituendo I_c nella prima si calcola I_a.

$$3 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}77 \cdot 10^{-3} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 10^3 I_a = 4{,}54 \quad \Rightarrow \quad I_a = \frac{4{,}54}{3 \cdot 10^3} = 1{,}51\text{mA}$$

Le correnti reali nei rami sono:

$$I_1 = I_a = 1{,}51\text{mA} \quad ; \quad I_2 = I_a - I_c = 1{,}51 \cdot 10^{-3} - 0{,}77 \cdot 10^{-3} = 0{,}74\text{mA}$$

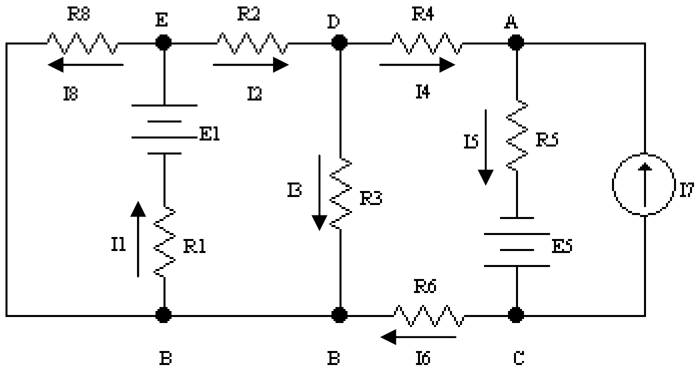
$$I_3 = I_c - I_b = 0{,}77 \cdot 10^{-3} - 1{,}42 \cdot 10^{-3} = -0{,}65\text{mA} \quad ; \quad I_4 = I_b = 1{,}42\text{mA}$$

$$I_5 = I_c + I_o = 0{,}77 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} = 2{,}77\text{mA}$$

Il verso effettivo della corrente I_3 è opposto a quello scelto.

TENSIONE TRA DUE PUNTI DI UNA RETE. LEGGE DI OHM GENERALIZZATA.

La tensione tra due punti A e B di una rete lineare si calcola sommando algebricamente tutte le tensioni incontrate lungo un percorso arbitrario che connette A con B.
Supposto il potenziale di A maggiore di quello di B ($V_{AB} > 0$),nella somma si prendono con segno positivo le tensioni che presentano il segno positivo verso A, con segno negativo quelle che presentano il segno positivo verso B (nel caso di cadute di tensione su resistenze, tale caduta di tensione si prende con segno positivo se la corrente va da A verso B, negativa se va da B verso A).
Ad esempio, si calcola la tensione V_{AB} del circuito di figura seguendo vari percorsi.

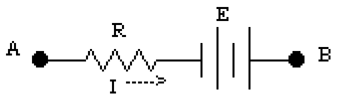


Percorso ACB : $V_{AB} = +R_5 I_5 - E_5 + R_6 I_6$

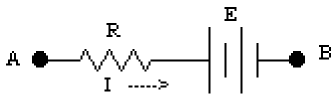
Percorso ACB : $V_{AB} = -R_4 I_4 + R_3 I_3$

Percorso ADEB : $V_{AB} = -R_4 I_4 - R_2 I_2 + E_1 - R_1 I_1 = -R_4 I_4 - R_2 I_2 + R_8 I_8$

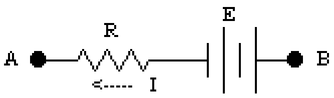
Se il tratto di circuito tra A e B è un ramo contenente una resistenza e un generatore, la relazione che esprime la tensione V_{AB} prende il nome di **Legge di Ohm generalizzata**, e si hanno i seguenti quattro casi (si suppone $V_{AB} > 0$):



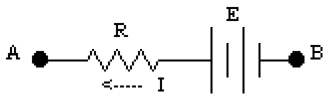
$V_{AB} = RI - E \quad V_{AB} \geq 0 \quad \text{o} \quad V_{AB} < 0$



$V_{AB} = RI + E \quad V_{AB} > 0$



$V_{AB} = -RI - E \quad V_{AB} < 0$



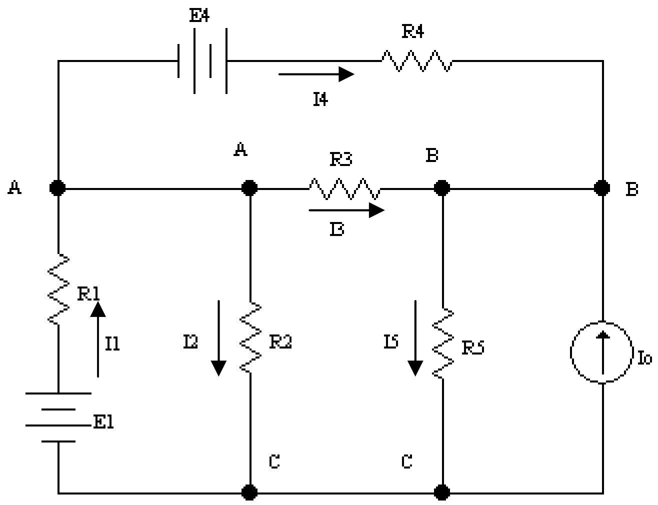
$V_{AB} = -RI + E \quad V_{AB} \geq 0 \quad \text{o} \quad V_{AB} < 0$

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Il metodo del potenziale ai nodi deriva anch'esso da Kirchhoff, ma considera solo le equazioni ai nodi. È basato sull'impostazione di un sistema ridotto, formato da n – 1 equazioni, dove n è il numero dei nodi, le cui incognite sono le tensioni dei vari nodi rispetto ad un nodo qualsiasi preso come riferimento. Le correnti nei rami vengono poi ricavate utilizzando la legge di Ohm generalizzata.
Si procede nel seguente modo:

1. Si sceglie un nodo di riferimento e si attribuisce un valore incognito di tensione fra ciascun nodo e il riferimento.
2. si attribuisce un verso arbitrario alle correnti in ogni ramo.
3. si esprimono le correnti in ciascun ramo in funzione delle tensioni incognite ai capi dello stesso ramo, utilizzando le espressioni della legge di Ohm generalizzata.
4. Si scrive il sistema di n – 1 equazioni agli n – 1 nodi, utilizzando le espressioni delle correnti ricavate al punto 3.
5. Si ricavano le tensioni ai nodi risolvendo il sistema.
6. Sostituendo queste tensioni nelle equazioni del punto 3 si ricavano le correnti.

Ad esempio, si risolve il circuito di figura.



$E_1 = 6V$; $E_4 = 4V$; $I_o = 2mA$

$R_1 = R_5 = 2k\Omega$; $R_4 = 1k\Omega$

$R_2 = R_3 = 4k\Omega$

1. Si assume come riferimento il nodo C; le tensioni incognite sono: V_{AC} e V_{BC}.
2. Si attribuiscono i versi delle correnti nei rami come in figura.
3. Si ricavano le espressioni delle correnti:

$$V_{AC} = E_1 - R_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{AC}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{AC}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{AC} - V_{BC}}{R_3}$$

$$I_5 = \frac{V_{BC}}{R_5} \qquad V_{AB} = V_{AC} - V_{BC} = -E_4 + R_4 I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{E_4 + V_{AC} - V_{BC}}{R_4}$$

4. Si impostano le due equazioni ai nodi:

nodo A : $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$

nodo B : $I_3 + I_4 - I_5 + I_o = 0$

Sostituendo alle correnti la loro espressione ricavata al punto 3, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{E_1 - V_{AC}}{R_1} - \dfrac{V_{AC}}{R_2} - \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{R_3} - \dfrac{E_4 + V_{AC} - V_{BC}}{R_4} = 0 \\ \\ \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{R_3} + \dfrac{E_4 + V_{AC} - V_{BC}}{R_4} - \dfrac{V_{BC}}{R_5} + I_o = 0 \end{cases}$$

5. Si sostituiscono i valori e si risolve.

$$\begin{cases} \dfrac{6 - V_{AC}}{2 \cdot 10^3} - \dfrac{V_{AC}}{4 \cdot 10^3} - \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{4 \cdot 10^3} - \dfrac{4 + V_{AC} - V_{BC}}{1 \cdot 10^3} = 0 \\ \\ \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{4 \cdot 10^3} + \dfrac{4 + V_{AC} - V_{BC}}{1 \cdot 10^3} - \dfrac{V_{BC}}{2 \cdot 10^3} + 2 \cdot 10^{-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12 - 2V_{AC} - V_{AC} - V_{AC} + V_{BC} - 16 - 4V_{AC} + 4V_{BC} = 0 \\ \\ V_{AC} - V_{BC} + 16 + 4V_{AC} - 4V_{BC} - 2V_{BC} + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8V_{AC} + 5V_{BC} = 4 \\ \\ 5V_{AC} - 7V_{BC} = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -40V_{AC} + 25V_{BC} = 20 \\ \\ \underline{40V_{AC} - 56V_{BC} = -192} \end{cases}$$

$$-31V_{BC} = -172 \quad \Rightarrow \quad V_{BC} = \frac{172}{31} = 5{,}55\text{V}$$

$$V_{AC} = \frac{7V_{BC} - 24}{5} = \frac{7 \cdot 5{,}5 - 24}{5} = 2{,}94\text{V}$$

6. Si calcolano le correnti.

$$I_1 = \frac{E_1 - V_{AC}}{R_1} = \frac{6 - 2{,}97}{2 \cdot 10^3} = 1{,}51\text{mA} \qquad I_2 = \frac{V_{AC}}{R_2} = \frac{2{,}97}{4 \cdot 10^3} = 0{,}74\text{mA}$$

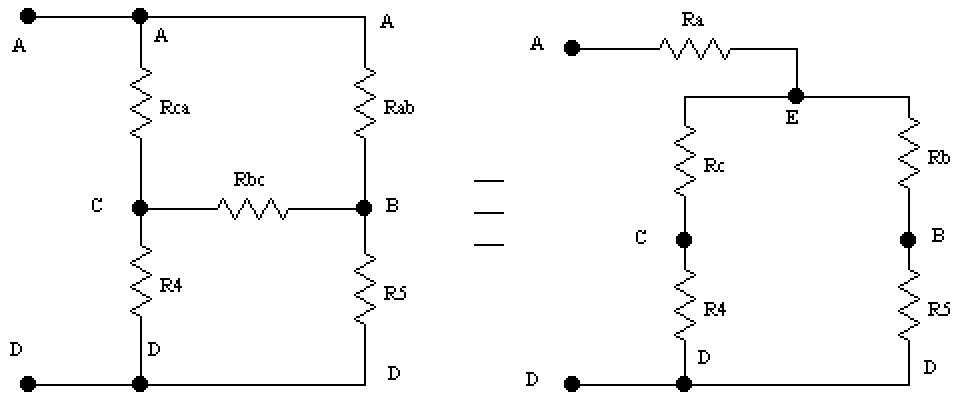
$$I_3 = \frac{V_{AC} - V_{BC}}{R_3} = \frac{2{,}97 - 5{,}55}{4 \cdot 10^3} = -0{,}65\text{mA} \qquad I_4 = \frac{E_4 + V_{AC} - V_{BC}}{R_4} = \frac{4 + 2{,}97 - 5{,}55}{1 \cdot 10^3} = 1{,}42\text{mA}$$

$$I_5 = \frac{V_{BC}}{R_5} = \frac{5{,}55}{2 \cdot 10^3} = 2{,}77\text{mA}$$

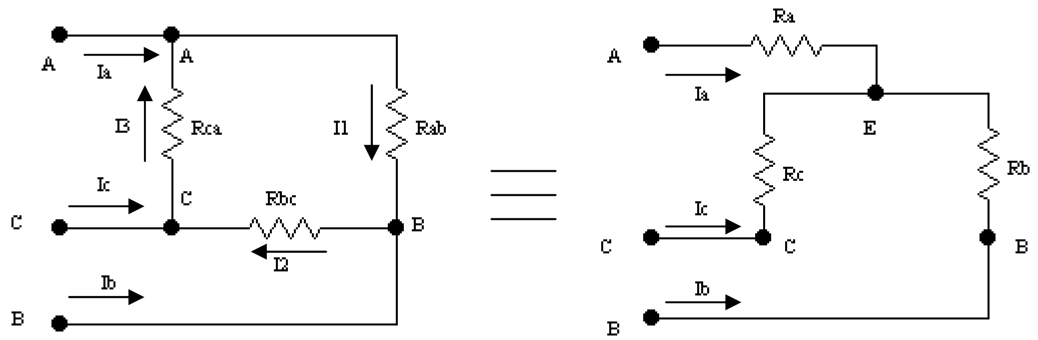
Il verso effettivo di I_3 è opposto a quello scelto.

TRASFORMAZIONE STELLA-TRIANGOLO E TRIANGOLO-STELLA

Esistono reti di resistenze che non sono scomponibili in gruppi serie e parallelo, come quella di figura.



Per potere calcolare la resistenza equivalente di tali circuiti si utilizza la trasformazione stella-triangolo.



Sistema a triangolo **Sistema a stella**

I due sistemi risultano equivalenti se una uguale terna di tensioni V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}, applicate tra i punti ab, bc, ca, producono nei corrispondenti conduttori esterni ai due sistemi due terne uguali di correnti I_a, I_b, I_c; l'equivalenza è, perciò, riferita alle tensioni e alle correnti esterne ai due sistemi, mentre all'interno di essi le singole resistenze sono soggette a tensioni differenti (nel collegamento a stella) e a correnti diverse (nel collegamento a triangolo).
Le relazioni di equivalenza si ottengono applicando i principi di Kirchhoff a ciascuno dei due schemi.

1. Per il sistema a stella si applica il primo principio di Kirchhoff al sistema ed il secondo principio alle due maglie (A, R_A, D, R_C, C) e (B, R_B, D, R_C, C).

$$\begin{cases} I_a + I_b + I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = -(I_a + I_b) \\ V_{AC} = R_a I_a - R_c I_c \\ V_{BC} = R_b I_b - R_c I_c \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di I_C ricavata dalla prima equazione nelle altre due, si ha:

$$\begin{cases} V_{AC} = R_a I_a + R_c (I_a + I_b) \\ V_{BC} = R_b I_b + R_c (I_a + I_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{AC} = (R_a + R_c) I_a + R_c I_b \\ V_{BC} = R_c I_a + (R_b + R_c) I_b \end{cases} \qquad (1)$$

2. Per il sistema a triangolo si applica il primo principio di Kirchhoff al sistema e ai due nodi A e B.

$$\begin{cases} I_a + I_b + I_c = 0 \\ I_a + I_3 = I_1 \quad \Rightarrow \quad I_a = I_1 - I_3 \\ I_b + I_1 = I_2 \quad \Rightarrow \quad I_b = I_2 - I_1 \end{cases}$$

Per la legge di Ohm applicata alle tre resistenze connesse a triangolo, si ha:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_{ab}} = \frac{V_{AC} - V_{BC}}{R_{ab}} \qquad I_2 = \frac{V_{BC}}{R_{bc}} \qquad I_3 = \frac{V_{CA}}{R_{ca}} = -\frac{V_{AC}}{R_{ca}}$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni ai nodi (A e B), si ha:

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{R_{ab}} + \dfrac{V_{AC}}{R_{ca}} \\ \\ I_b = \dfrac{V_{BC}}{R_{bc}} - \dfrac{V_{AC} - V_{BC}}{R_{ab}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{ca} V_{AC} - R_{ca} V_{BC} + R_{ab} V_{AC} = R_{ab} R_{ca} I_a \\ \\ R_{ab} V_{BC} - R_{bc} V_{AC} + R_{bc} V_{BC} = R_{ab} R_{bc} I_b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (R_{ab} + R_{ca}) V_{AC} - R_{ca} V_{BC} = R_{ab} R_{ca} I_a \\ \\ -R_{bc} V_{AC} + (R_{ab} + R_{bc}) V_{BC} = R_{ab} R_{bc} I_b \end{cases}$$

Si risolve rispetto a V_{AC} e V_{BC}:

$$\begin{cases} V_{BC} = \dfrac{R_{ab} + R_{ca}}{R_{ca}} V_{AC} - R_{ab} I_a \\ \\ -R_{bc} V_{AC} + (R_{ab} + R_{bc}) \dfrac{R_{ab} + R_{ca}}{R_{ca}} V_{AC} - (R_{ab} + R_{bc}) R_{ab} I_a = R_{ab} R_{bc} I_b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{AC} \left(-R_{bc} R_{ca} + R_{ab}^2 + R_{ab} R_{ca} + R_{ab} R_{bc} + R_{ab} + R_{bc} R_{ca} \right) =$$
$$= R_{ab}^2 R_{ca} I_a + R_{ab} R_{bc} R_{ca} I_a + R_{ab} R_{bc} R_{ca} I_b \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{AC} = \frac{(R_{ab} + R_{bc}) R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} I_a + \frac{R_{bc} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} I_b$$

Sostituendo in V_{BC}, si ha:

$$V_{BC}=\frac{R_{ab}+R_{ca}}{R_{ca}}\cdot\frac{(R_{ab}+R_{bc})R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_a+\frac{R_{ab}+R_{ca}}{R_{ca}}\cdot\frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_b-R_{ab}I_a=$$

$$=\frac{R_{ab}^2+R_{ab}R_{bc}+R_{ab}R_{ca}+R_{bc}R_{ca}-R_{ab}^2-R_{ab}R_{bc}-R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_a+\frac{(R_{ab}+R_{ca})R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_b=$$

$$=\frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_a+\frac{R_{bc}(R_{ab}+R_{ca})}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_b$$

Riassumendo

$$\begin{cases} V_{AC}=\dfrac{R_{ca}(R_{ab}+R_{bc})}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_a+\dfrac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_b \\ \\ V_{BC}=\dfrac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_a+\dfrac{R_{bc}(R_{ab}+R_{ca})}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}I_b \end{cases} \qquad (2)$$

Affinché i sistemi di equazioni (1) e (2) ottenuti (relativi, rispettivamente, alle due connessioni a stella e a triangolo) risultino identicamente soddisfatti, per qualsiasi combinazione di correnti, devono essere ordinatamente uguali nei due sistemi i coefficienti delle due correnti I_a e I_b.
Le condizioni di equivalenza tra i due sistemi considerati sono espresse dalle tre relazioni seguenti:

$$\begin{cases} R_a+R_c=\dfrac{R_{ca}(R_{ab}+R_{bc})}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \\ \\ R_c=\dfrac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \\ \\ R_b+R_c=\dfrac{R_{bc}(R_{ab}+R_{ac})}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \end{cases} \qquad (3)$$

Sottraendo la seconda dalla prima e dalla terza, si ha:

$$R_a=\frac{R_{ab}R_{ca}+R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}-\frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}=\frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$$

$$R_b=\frac{R_{ab}R_{bc}+R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}-\frac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}=\frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$$

Riassumendo

$$\begin{cases} R_a = \dfrac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \\[2em] R_b = \dfrac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \\[2em] R_c = \dfrac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} \end{cases}$$

Tali equazioni sono relative alla trasformazione triangolo-stella.

3. La soluzione del problema inverso si ottiene esplicitando le equazioni dei sistemi associati alla stella e al triangolo in funzione delle correnti e imponendo l'uguaglianza dei coefficienti.

4. **Sistema a stella**. Dal sistema (1) si ricava I_b dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda:

$$\begin{cases} I_b = \dfrac{V_{AC}-(R_a+R_c)I_a}{R_c} \\[2em] V_{BC} = R_c I_a + (R_b+R_c)\dfrac{V_{AC}-(R_a+R_c)}{R_c} I_a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_c^2 I_a + R_b V_{AC} - (R_a R_b + R_b R_c) I_a + R_c V_{AC} - (R_a R_c + R_c^2) I_a = R_c V_{BC} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (R_c^2 - R_a R_b - R_b R_c - R_a R_c - R_c^2) I_a = -(R_b + R_c) V_{AC} + R_c V_{BC} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_a = \frac{(R_b+R_c)V_{AC} - R_c V_{BC}}{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}$$

Si sostituisce nell'equazione di I_b:

$$I_b = \frac{V_{AC}}{R_c} - \frac{R_a+R_c}{R_c}\cdot\frac{(R_b+R_c)V_{AC}-R_cV_{BC}}{R_aR_b+R_aR_c+R_bR_c} =$$

$$= \frac{1}{R_c}\cdot\frac{(R_aR_b+R_aR_c+R_bR_c)V_{AC} - (R_aR_b+R_aR_c+R_c^2+R_bR_c)V_{AC} + (R_aR_c+R_c^2)V_{BC}}{R_aR_b+R_aR_c+R_bR_c} =$$

$$= \frac{1}{R_c}\cdot\frac{-R_c^2V_{AC}+(R_aR_c+R_c^2)V_{BC}}{R_aR_b+R_aR_c+R_bR_c} = \frac{-R_cV_{AC}+(R_a+R_c)V_{BC}}{R_aR_b+R_aR_c+R_bR_c}$$

Riassumendo

$$\begin{cases} I_a = \dfrac{R_b + R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} V_{AC} - \dfrac{R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} V_{BC} \\ \\ I_b = -\dfrac{R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} V_{AC} + \dfrac{R_a + R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} V_{BC} \end{cases} \qquad (4)$$

5. **Sistema a triangolo**. Dal sistema (1) si esplicitano I_a e I_b in funzione di V_{AB} e V_{BC}:

$$\begin{cases} I_a = \left(\dfrac{1}{R_{ab}} + \dfrac{1}{R_{ca}}\right) V_{AC} - \dfrac{1}{R_{ab}} V_{BC} \\ \\ I_b = -\dfrac{1}{R_{ab}} V_{AC} + \left(\dfrac{1}{R_{ab}} + \dfrac{1}{R_{bc}}\right) V_{BC} \end{cases} \qquad (5)$$

Affinché i sistemi di equazioni (4) e (5) ottenuti (relativi, rispettivamente, alle due connessioni a stella e a triangolo) risultino identicamente soddisfatti, per qualsiasi combinazione di tensioni, devono essere ordinatamente uguali nei due sistemi i coefficienti delle due tensioni V_{AB} e V_{BC}.
Le condizioni di equivalenza tra i due sistemi considerati sono espresse dalle tre relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_{ab}} + \dfrac{1}{R_{ca}} = \dfrac{R_b + R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} \\ \\ \dfrac{1}{R_{ab}} = \dfrac{R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} \quad \Rightarrow \quad R_{ab} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_c} \\ \\ \dfrac{1}{R_{ab}} + \dfrac{1}{R_{bc}} = \dfrac{R_a + R_c}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima e dalla terza, si ha:

$$\frac{1}{R_{ca}} = \frac{R_b}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} \quad \Rightarrow \quad R_{ca} = \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_b}$$

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{R_a}{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c} \quad \Rightarrow \quad R_{bc} = \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_a}$$

Riassumendo

$$\begin{cases} R_{ab} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_c} \\ \\ R_{bc} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_a} \\ \\ R_{ca} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_b} \end{cases}$$

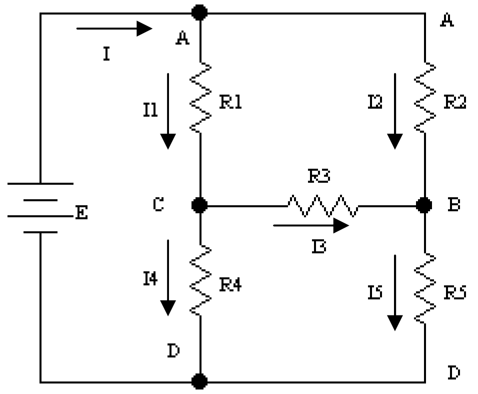
Tali equazioni sono relative alla trasformazione stella-triangolo.

Se le resistenze connesse a stella sono tutte uguali fra loro ed hanno il valore R_a, anche le tre resistenze del triangolo equivalente sono uguali, di valore

$$R_{ab} = 3R_a \qquad \text{e inversamente} \qquad R_a = \frac{R_{ab}}{3}$$

Esempio 1: Trasformazione triangolo-stella.

Del circuito di figura calcolare la resistenza equivalente, le tensioni e le correnti.

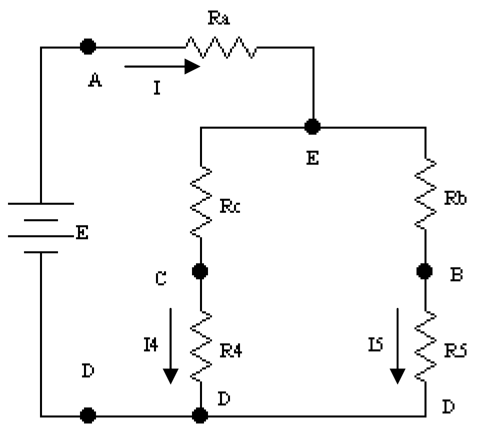


$E_1 = 12V$

$R_1 = R_3 = 2k\Omega$; $R_2 = R_4 = 4k\Omega$

$R_5 = 3k\Omega$

Si trasforma il triangolo ABC in una stella.



Le equazioni per la trasformazione triangolo-stella, con $R_{ab} = R_2$, $R_{bc} = R_3$, $R_{ca} = R_1$, sono le seguenti:

$$\begin{cases} R_a = \dfrac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} = \dfrac{R_2R_1}{R_2+R_3+R_1} = \dfrac{4\cdot10^3\cdot2\cdot10^3}{4\cdot10^3+2\cdot10^3+2\cdot10^3} = 1K\Omega \\[2ex] R_b = \dfrac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} = \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3+R_1} = \dfrac{4\cdot10^3\cdot2\cdot10^3}{4\cdot10^3+2\cdot10^3+2\cdot10^3} = 1K\Omega \\[2ex] R_c = \dfrac{R_{bc}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}} = \dfrac{R_3R_1}{R_2+R_3+R_1} = \dfrac{2\cdot10^3\cdot2\cdot10^3}{4\cdot10^3+2\cdot10^3+2\cdot10^3} = 0{,}5K\Omega \end{cases}$$

Calcolo della resistenza equivalente.

$$R_{eq} = R_a + \frac{(R_c+R_4)(R_b+R_5)}{R_c+R_4+R_b+R_5} = 1\cdot10^3 + \frac{(0{,}5\cdot10^3+4\cdot10^3)(1\cdot10^3+3\cdot10^3)}{0{,}5\cdot10^3+4\cdot10^3+1\cdot10^3+3\cdot10^3} = 3{,}12K\Omega$$

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{12}{3{,}12\cdot10^3} = 3{,}85mA \qquad V_{AE} = R_aI = 1\cdot10^3\cdot3{,}85\cdot10^{-3} = 3{,}85V$$

$$V_{ED} = E - V_{AE} = 12 - 3{,}85 = 8{,}15V \qquad I_4 = \frac{V_{ED}}{R_c+R_4} = \frac{8{,}15}{0{,}5\cdot10^3+4\cdot10^3} = 1{,}81mA$$

$$I_5 = \frac{V_{ED}}{R_b+R_5} = \frac{8{,}15}{1\cdot10^3+3\cdot10^3} = 2{,}04mA \qquad V_{CD} = V_4 = R_4I_4 = 4\cdot10^3\cdot1{,}81\cdot10^{-3} = 7{,}24V$$

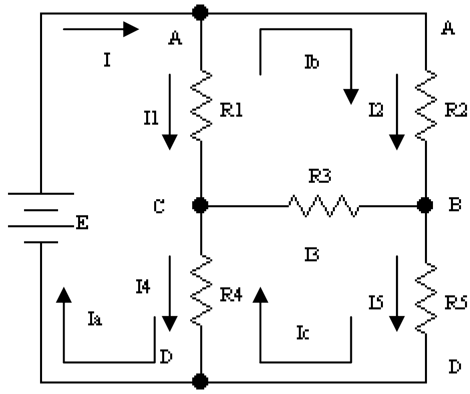
$$V_{BD} = V_5 = R_5I_5 = 3\cdot10^3\cdot2{,}04\cdot10^{-3} = 6{,}12V \qquad V_{CB} = V_3 = V_{CD} - V_{BD} = 7{,}24 - 6{,}12 = 1{,}12V$$

$$I_3 = \frac{V_{CB}}{R_3} = \frac{1{,}12}{2\cdot10^3} = 0{,}56mA \qquad V_{AB} = V_2 = V_{AD} - V_{BD} = E - V_{BD} = 12 - 6{,}12 = 5{,}88V$$

$$V_{AC} = V_1 = V_{AD} - V_{CD} = E - V_{CD} = 12 - 7{,}24 = 4{,}76V$$

$$I_1 = \frac{V_{AC}}{R_1} = \frac{4{,}76}{2 \cdot 10^3} = 2{,}38mA \qquad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{5{,}88}{4 \cdot 10^3} = 1{,}47mA$$

Al fine di controllare l'esattezza dei risultati, si risolve il circuito col metodo delle correnti cicliche di maglia.
Si fissano i versi delle correnti cicliche e di percorrenza delle maglie come in figura e si scrivono le equazioni alle maglie applicando il secondo principio di Kirchhoff.



$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad E = R_1(I_a - I_b) + R_4(I_a - I_c) \\ \text{maglia} \quad b \quad 0 = R_1(I_b - I_a) + R_2 I_b + R_3(I_b - I_c) \\ \text{maglia} \quad a \quad 0 = R_3(I_c - I_b) + R_4(I_c - I_a) + R_5 I_c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 I_a - R_1 I_b + R_4 I_a - R_4 I_c = E \\ R_1 I_b - R_1 I_a + R_2 I_b + R_3 I_b - R_3 I_c = 0 \\ R_3 I_c - R_3 I_b + R_4 I_c - R_4 I_a + R_5 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_4) I_a - R_1 I_b - R_4 I_c = E \\ - R_1 I_a + (R_1 + R_2 + R_3) I_b - R_3 I_c = 0 \\ - R_4 I_a - R_3 I_b + (R_3 + R_4 + R_5) I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 12 \\ - 2 \cdot 10^3 I_a + 8 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 0 \\ - 4 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b + 9 \cdot 10^3 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ - I_a + 4 I_b - I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_a = 4 I_b - I_c \quad \Rightarrow \\ - 4 I_a - 2 I_b + 9 I_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_a = 4 I_b - I_c \\ -16 I_b + 4 I_c - 2 I_b + 9 I_c = 0 \\ 12 \cdot 10^3 I_b - 3 \cdot 10^3 I_c - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_a = 4 I_b - I_c \\ -18 I_b + 13 I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = \dfrac{18}{13} I_b \quad \Rightarrow \\ 11 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 I_c = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 11 \cdot 10^3 I_b - 5 \cdot 10^3 \cdot \frac{18}{13} I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{53}{13} \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad I_b = \frac{13 \cdot 6}{53} \cdot 10^{-3} = 1{,}47mA$$

$$I_c = \frac{18}{13} I_b = \frac{18}{13} \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 2{,}04mA \qquad I_a = 4 I_b - I_c = 4 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} - 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 3{,}84mA$$

$I = I_a = 3{,}84mA$ $\qquad$ $I_1 = I_a - I_b = 3{,}84 \cdot 10^{-3} - 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 2{,}37mA$

$I_2 = I_b = 1{,}47mA$ $\qquad$ $I_3 = I_c - I_b = 2{,}04 \cdot 10^{-3} - 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 0{,}57mA$

$I_4 = I_a - I_c = 3{,}84 \cdot 10^{-3} - 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 1{,}8mA$ $\qquad$ $I_5 = I_c = 2{,}04mA$

$V_{AC} = V_1 = R_1 I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}37 \cdot 10^{-3} = 4{,}74V$ $\qquad$ $V_{AB} = V_2 = R_2 I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-3} = 5{,}88V$

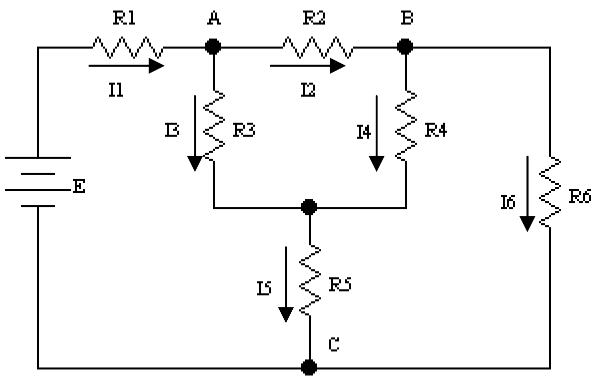
$V_{CB} = V_3 = R_3 I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}57 \cdot 10^{-3} = 1{,}14V$ $\qquad$ $V_{CD} = V_4 = R_4 I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} = 7{,}2V$

$V_{BD} = V_5 = R_5 I_5 = 3 \cdot 10^3 \cdot 2{,}04 \cdot 10^{-3} = 6{,}12V$

Stessi valori di prima.

Esempio 2: Trasformazione stella-triangolo.

Del circuito di figura calcolare la resistenza equivalente, le tensioni e le correnti.

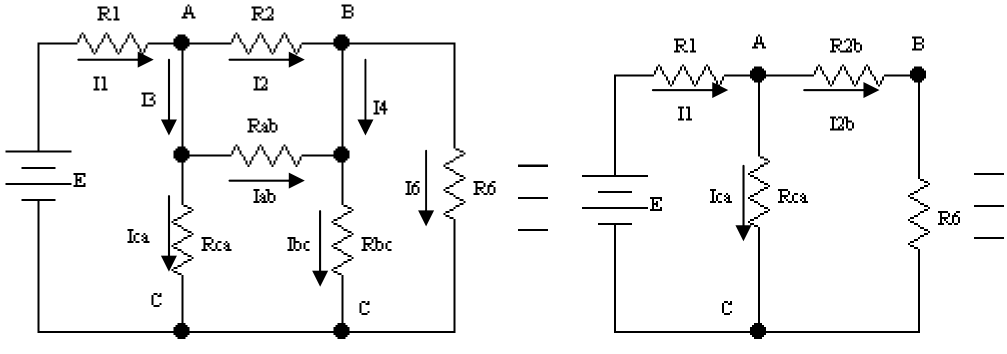


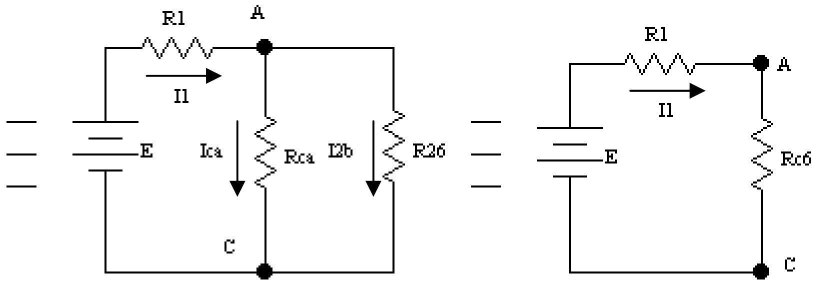
$E_1 = 12V$

$R_1 = R_3 = 2k\Omega$; $R_2 = R_4 = 1k\Omega$

$R_5 = R_6 = 4k\Omega$

Si trasforma la stella ABC in un triangolo e si risolve.





Le equazioni per la trasformazione stella-triangolo, con $R_a = R_3$, $R_b = R_4$, $R_c = R_5$, sono le seguenti:

$$\begin{cases} R_{ab} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_c} \\ \\ R_{bc} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_a} \\ \\ R_{ca} = \dfrac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{ab} = \dfrac{R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}{R_5} = \dfrac{2\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3}{4\cdot 10^3} = 3{,}5\text{k}\Omega \\ \\ R_{bc} = \dfrac{R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}{R_3} = \dfrac{2\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3}{2\cdot 10^3} = 7\text{k}\Omega \\ \\ R_{ca} = \dfrac{R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}{R_4} = \dfrac{2\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3 + 1\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3}{1\cdot 10^3} = 14\text{k}\Omega \end{cases}$$

Calcolo della resistenza equivalente.

$$R_{2b} = \frac{R_2R_{ab}}{R_2 + R_{ab}} = \frac{1\cdot 10^3 \cdot 3{,}5\cdot 10^3}{1\cdot 10^3 + 3{,}5\cdot 10^3} = 0{,}78\text{k}\Omega \qquad R_{6c} = \frac{R_{bc}R_6}{R_{bc} + R_6} = \frac{7\cdot 10^3 \cdot 4\cdot 10^3}{7\cdot 10^3 + 4\cdot 10^3} = 2{,}45\text{k}\Omega$$

$$R_{26} = R_{2b} + R_{6c} = 0{,}78\cdot 10^3 + 2{,}45\cdot 10^3 = 3{,}23\text{k}\Omega$$

$$R_{c6} = \frac{R_{ca}R_{26}}{R_{ca} + R_{26}} = \frac{14\cdot 10^3 \cdot 3{,}23\cdot 10^3}{14\cdot 10^3 + 3{,}23\cdot 10^3} = 2{,}62\text{k}\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{c6} = 2\cdot 10^3 + 2{,}62\cdot 10^3 = 4{,}62\text{k}\Omega$$

$$I_1 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{12}{4{,}62 \cdot 10^3} = 2{,}6mA \qquad V_1 = R_1 I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-3} = 5{,}2V$$

$$V_{AC} = V_{26} = R_{c6} I_1 = 2{,}62 \cdot 10^3 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-3} = 6{,}84V \qquad I_{ca} = \frac{V_{AC}}{R_{ca}} = \frac{6{,}84}{14 \cdot 10^3} = 0{,}49mA$$

$$I_{2b} = \frac{V_{26}}{R_{26}} = \frac{6{,}84}{3{,}23 \cdot 10^3} = 2{,}1mA \qquad V_{AB} = V_2 = R_{2b} I_{2b} = 0{,}78 \cdot 10^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3} = 1{,}64V$$

$$V_{BC} = V_6 = R_{6c} I_{2b} = 2{,}45 \cdot 10^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3} = 5{,}15V \qquad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{1{,}64}{1 \cdot 10^3} = 1{,}64mA$$

$$I_{ab} = \frac{V_{AB}}{R_{ab}} = \frac{1{,}64}{3{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}47mA \qquad I_{bc} = \frac{V_{BC}}{R_{bc}} = \frac{5{,}15}{7 \cdot 10^3} = 0{,}73mA$$

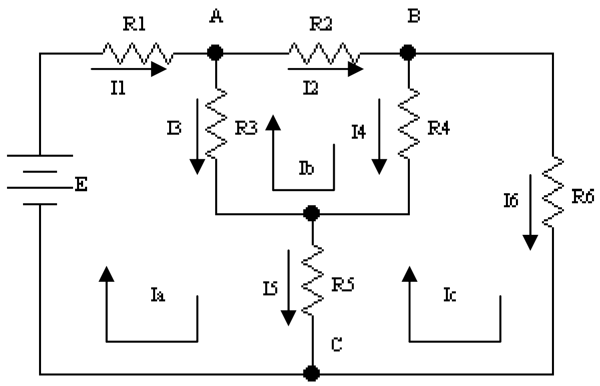
$$I_6 = \frac{V_6}{R_6} = \frac{5{,}15}{4 \cdot 10^3} = 1{,}29mA \qquad I_3 = I_{ab} + I_{ca} = 0{,}47 \cdot 10^{-3} + 0{,}49 = 0{,}96mA$$

$$I_4 = I_{bc} - I_{ab} = 0{,}73 \cdot 10^{-3} - 0{,}47 = 0{,}26mA \qquad I_5 = I_{ca} + I_{bc} = 0{,}49 \cdot 10^{-3} + 0{,}73 = 1{,}22mA$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}96 \cdot 10^{-3} = 1{,}92V \qquad V_5 = R_5 I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}22 \cdot 10^{-3} = 4{,}88V$$

$$V_4 = R_4 I_4 = 1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}26 \cdot 10^{-3} = 0{,}26V$$

Al fine di controllare l'esattezza dei risultati, si risolve il circuito col metodo delle correnti cicliche di maglia.
Si fissano i versi delle correnti cicliche e di percorrenza delle maglie come in figura e si scrivono le equazioni alle maglie applicando il secondo principio di Kirchhoff.



$$\begin{cases} \text{maglia} \quad a \quad E = R_1 I_a + R_3 (I_a - I_b) + R_5 (I_a - I_c) \\ \text{maglia} \quad b \quad 0 = R_2 I_b + R_3 (I_b - I_a) + R_4 (I_b - I_c) \\ \text{maglia} \quad a \quad 0 = R_4 (I_c - I_b) + R_5 (I_c - I_a) + R_6 I_c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 I_a + R_3 I_a - R_3 I_b + R_5 I_a = E \\ R_2 I_b + R_3 I_b - R_3 I_a + R_4 I_b - R_4 I_c = 0 \\ R_4 I_c - R_4 I_b + R_5 I_c - R_5 I_a + R_6 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_3 + R_5) I_a - R_3 I_b - R_5 I_c = E \\ - R_3 I_a + (R_2 + R_3 + R_4) I_b - R_4 I_c = 0 \\ - R_5 I_a - R_4 I_b + (R_4 + R_5 + R_6) I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot 10^3 I_a - 2 \cdot 10^3 I_b - 4 \cdot 10^3 I_c = 12 \\ - 2 \cdot 10^3 I_a + 4 \cdot 10^3 I_b - 1 \cdot 10^3 I_c = 0 \\ - 4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b + 9 \cdot 10^3 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b - 2 \cdot 10^3 I_c = 6 \\ - 2 I_a + 4 I_b - I_c = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = -2 I_a + 4 I_b \\ - 4 I_a - I_b + 9 I_c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_c = -2 I_a + 4 I_b \\ - 4 I_a - I_b - 18 I_a + 36 I_b = 0 \\ 4 \cdot 10^3 I_a - 1 \cdot 10^3 I_b + 4 \cdot 10^3 I_a - 8 \cdot 10^3 I_b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_c = -2 I_a + 4 I_b \\ - 22 I_a + 35 I_b = 0 \quad \Rightarrow \quad I_a = \dfrac{35}{22} I_b \\ 8 \cdot 10^3 I_a - 9 \cdot 10^3 I_b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8 \cdot 10^3 \cdot \frac{35}{22} I_b - 9 \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{41}{11} \cdot 10^3 I_b = 6 \quad \Rightarrow \quad I_b = \frac{11 \cdot 6}{41} \cdot 10^{-3} = 1{,}61 \text{mA}$$

$$I_a = \frac{35}{22} I_b = \frac{35}{22} \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 2{,}56 \text{mA}$$

$$I_c = -2 I_a + 4 I_b = -2 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 1{,}32 \text{mA} \qquad I_1 = I_a = 2{,}56 \text{mA}$$

$$I_2 = I_b = 1{,}61 \text{mA} \qquad I_3 = I_a - I_b = 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 0{,}95 \text{mA}$$

$$I_4 = I_b - I_c = 1{,}61 \cdot 10^{-3} - 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 0{,}29 \text{mA} \qquad I_6 = I_c = 1{,}32 \text{mA}$$

$$I_5 = I_a - I_c = 2{,}56 \cdot 10^{-3} - 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 1{,}24 \text{mA}$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-3} = 5{,}12 \text{V} \qquad V_2 = R_2 I_2 = 1 \cdot 10^3 \cdot 1{,}61 \cdot 10^{-3} = 1{,}61 \text{V}$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}95 \cdot 10^{-3} = 1{,}9 \text{V} \qquad V_4 = R_4 I_4 = 1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}29 \cdot 10^{-3} = 0{,}29 \text{V}$$

$$V_5 = R_5 I_5 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-3} = 4{,}96 \text{V} \qquad V_6 = R_6 I_6 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}32 \cdot 10^{-3} = 5{,}28 \text{V}$$

Stessi valori di prima.