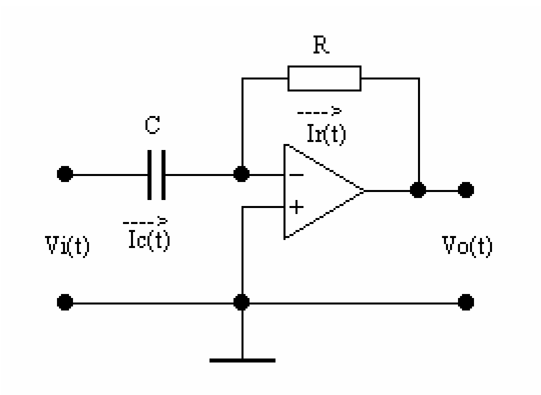
Derivatore invertente

Il circuito derivatore invertente è un dispositivo che dà in uscita un segnale proporzionale alla derivata del segnale d'ingresso; ossia la forma d'onda d'uscita è la derivata della forma d'onda d'ingresso.
Un circuito derivatore è quello riportato in figura.



Calcolo della funzione d'uscita per un generico segnale d'ingresso

Si calcola la funzione d'uscita. Tenendo conto dell'equipotenzialità degli ingressi $(\mathbf{V_- = V_+ = 0})$, e che gli ingressi non assorbono corrente, si ha:

$$\mathbf{I_C(t) = I_R(t) \quad \Rightarrow \quad C \cdot \frac{d(V_i - V_-)}{dt} = \frac{V_- - V_o}{R} \quad \Rightarrow \quad V_o = -RC \cdot \frac{dV_i}{dt}}$$

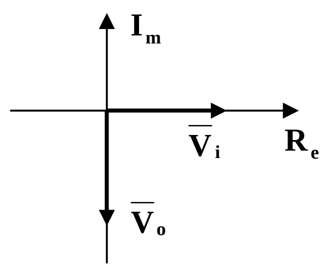
La tensione d'uscita è proporzionale alla derivata del segnale d'ingresso.

Calcolo della funzione d'uscita in notazione simbolica con ingresso sinusoidale.

L'amplificatore operazionale sé in configurazione di amplificatore invertente, per cui:

$$\mathbf{\overline{V}_o = -\frac{\overline{Z}_R}{\overline{Z}_C} \cdot \overline{V}_i = -\frac{R}{-jX_C} \cdot \overline{V}_i = -j\omega RC \cdot \overline{V}_i}$$

L'uscita risulta sfasata in ritardo di 90° rispetto all'ingresso. Nel piano complesso si ha:



Si scrive la funzione di trasferimento e se ne calcola modulo e fase:

$$G(j\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_i} = -j\omega RC \left\langle \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \omega RC = 2\pi fRC \\ \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow -90° \end{array} \right.$$

La fase non dipende da ω ed è sempre $-\frac{\pi}{2}$. L'ampiezza invece dipende da ω.
Amplificazione e frequenza sono direttamente proporzionali, quindi all'aumentare della frequenza aumenta l'amplificazione, e viceversa.

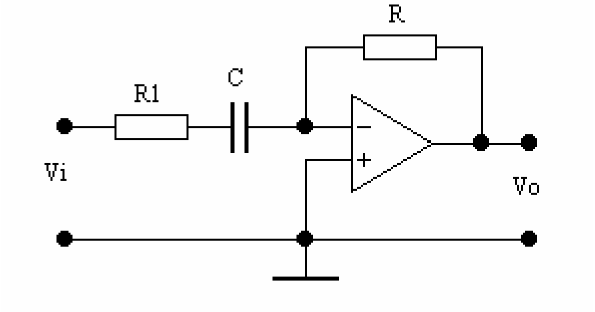
- Se $\omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| \rightarrow 0$

- Se $\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)| \rightarrow \infty$

Il problema si presenta alle alte frequenze, alle quali l'amplificazione tende ad assumere il suo massimo valore. Sovrapposti la segnale d'ingresso sono presenti le tensioni di rumore, tensioni di ampiezza molto piccola ed elevata frequenza, che vengono derivate, insieme al segnale d'ingresso, con la massima amplificazione, portando l'uscita in zone di funzionamento non lineari rendendo problematico il corretto funzionamento del circuito.
L'elevato valore dell'amplificazione alle alte frequenze è dovuto alla capacità la cui reattanza è inversamente proporzionale alla frequenza, ossia alle alte frequenze la capacità tende ad assumere le caratteristiche di un corto circuito (reattanza di valore praticamente nullo). Per impedire che il ramo contenente la capacità presenti un'impedenza troppo bassa, ossia per limitare l'amplificazione alle alte frequenze, si mette in serie alla capacità una resistenza di opportuno valore, come riportato in figura.

Derivatore invertente reale

Alle alte frequenze la reattanza capacitiva X_C diminuisce e aumenta l'amplificazione. Bisogna, quindi, impedire che il ramo contenente la capacità diventi un cortocircuito inserendo in serie alla capacità una resistenza R, così che l'impedenza del ramo contenente la capacità avrà in ogni caso un valore finito, limitando l'amplificazione alle alte frequenze.



La funzione d'uscita è:

$$\overline{V}_o = -\frac{R}{R_1 - jX_C}\overline{V}_i = -\frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{1-j\frac{X_C}{R_1}}\cdot\overline{V}_i = -\frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{1-j\frac{1}{\omega R_1 C}}\cdot\overline{V}_i$$

La funzione di trasferimento è:

$$G(j\omega) = -\frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{1-j\frac{1}{\omega R_1 C}} \left\langle \begin{array}{l} \left|G(j\omega)\right| = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega R_1 C}\right)^2}} \\ \\ \varphi = \pi - \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\omega R_1 C}\right) = \pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{\omega R_1 C} \end{array}\right.$$

Al variare della frequenza, si ha:

Se $\omega \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega R_1 C} >> 1 \Rightarrow 1$ **è trascurabile rispetto a** $\left(\frac{1}{\omega R_1 C}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|G(j\omega)\right| = \omega RC$ **e** $\varphi = 3\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ **si comporta da derivatore invertene**

Se $\omega \to \infty \Rightarrow \frac{1}{\omega R_1 C} << 1 \Rightarrow \frac{1}{\omega R_1 C}$ **è trascurabile rispetto a 1** $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left|G(j\omega)\right| = \frac{R}{R_1}$ **e** $\varphi = \pi$ **si comporta da amplificatore invertene**

Il circuito presenta una frequenza di taglio f_t, ossia quella frequenza alla quale il modulo della funzione di trasferimento si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al suo massimo valore.
La pulsazione di taglio si ottiene imponendo che il modulo della funzione di trasferimento, a tale pulsazione, sia $\frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{1}{\omega_t R_1 C}}\right)^2}} = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega_t R_1 C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\omega_t R_1 C}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_t R_1 C = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_t = \frac{1}{R_1 C} \quad \Rightarrow \quad f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

A tale frequenza la fase subisce una variazione di $\frac{\pi}{4}$:

$$\varphi = \pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{\omega_t R_1 C} = \pi + \mathrm{arctg}\frac{1}{\frac{1}{R_1 C}\cdot R_1 C} = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$$

La frequenza a guadagno unitario è quella frequenza alla quale il guadagno (il modulo della funzione di trasferimento alle basse frequenze) vale 1:

$$\omega_1 RC = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Le condizioni di progetto, se non ci sono particolare richieste, sono:

$$RC = T \qquad ; \qquad R = 10R_1$$

dove T è il periodo del segnale d'ingresso.

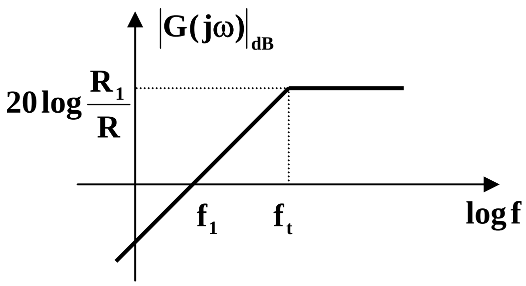


diagramma di Bode del modulo

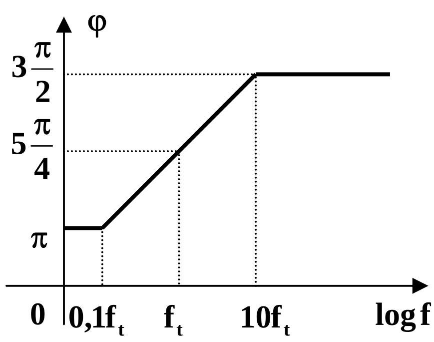
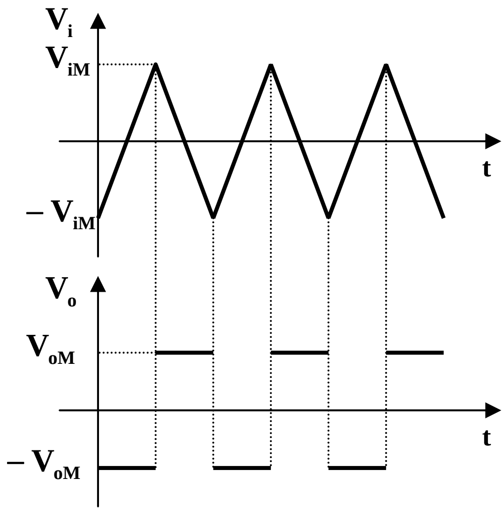


diagramma della fase

Risposta del circuito all'onda triangolare

Se in ingresso mettiamo un segnale ad onda triangolare otteniamo in uscita un segnale ad onda quadra.

$$v_i(t) = \begin{cases} \frac{4V_{iM}}{T}(t - kT) - V_{iM} & \text{per} \quad kT \le t < \frac{T}{2} + kT \\ -\frac{4V_{iM}}{T}\left(t - \frac{T}{2} - kT\right) + V_{iM} & \text{per} \quad \frac{T}{2} + kT \le t < T + kT \end{cases}$$



Risposta alla rampa in salita, per $0 \le t < \frac{T}{2}$

$$V_o(t) = -RC\frac{dV_i(t)}{dt} = -RC\frac{d}{dt}\left(\frac{4V_{iM}}{T}t - V_{iM}\right) = -\frac{4RCV_{iM}}{T} = -V_{oM}$$

Risposta alla rampa in discesa, per $\frac{T}{2} \le t < T$

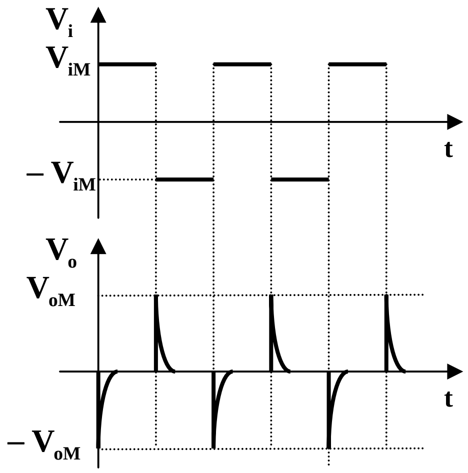
$$V_o(t) = -RC\frac{dV_i(t)}{dt} = -RC\frac{d}{dt}\left[-\frac{4V_{iM}}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) + V_{iM}\right] = \frac{4RCV_{iM}}{T} = V_{oM}$$

Riassumendo

$$v_o(t) = \begin{cases} -\frac{4RCV_{iM}}{T} & \text{per} \quad kT \le t < \frac{T}{2} + kT \\ \\ \frac{4RCV_{iM}}{T} & \text{per} \quad \frac{T}{2} + kT \le t < T + kT \end{cases}$$

Risposta del circuito all'onda quadra

$$v_i(t) = \begin{cases} V_{iM} & \text{per} \quad kT \le t < \frac{T}{2} + kT \\ \\ -V_{iM} & \text{per} \quad \frac{T}{2} + kT \le t < T + kT \end{cases}$$



L’uscita, durante il tempo in cui $\mathbf{V_i}$ è costante, è nulla. Si ha, invece, un transitorio d’uscita negli istanti in cui la tensione d’ingresso commuta da livello alto a livello basso, e viceversa. In tali istanti si ha una variazione della tensione d’ingresso $\Delta \mathbf{V_i} = \pm 2\mathbf{V_{iM}}$. Non potendo la tensione ai capi della capacità variare istantaneamente, tale variazione $\Delta \mathbf{V_i}$ si avrà sulla resistenza $\mathbf{R_1}$, con conseguente variazione della corrente $\mathbf{i_C(t)}$ di una quantità $\Delta \mathbf{i_C} = \frac{\Delta \mathbf{V_i}}{\mathbf{R_1}}$. Poiché istante per istante $\mathbf{i_C(t) = i_R(t)}$, analoga variazione di corrente si dovrà avere per $\mathbf{i_R(t)}$, $\Delta \mathbf{i_C} = \Delta \mathbf{i_R}$, con conseguente variazione istantanea della tensione $\mathbf{V_o(t)}$ di una quantità pari a

$$\Delta \mathbf{V_o} = -\mathbf{R}\Delta \mathbf{i_C} = -\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R_1}}\Delta \mathbf{V_i} = \mp \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R_1}} 2\mathbf{V_{iM}}.$$

La capacità, attraverso $\mathbf{R_1}$, si carica, partendo dal valore $\mp \mathbf{V_{iM}}$, alla tensione $\pm \mathbf{V_{iM}}$, secondo l’equazione.

$$\mathbf{v_C(t)} = \pm \mathbf{V_{iM}} + \left(\mp \mathbf{V_{iM}} \mp \mathbf{V_{iM}}\right)\mathbf{e}^{-\frac{t}{R_1C}} = \pm \mathbf{V_{iM}} \mp 2\mathbf{V_{iM}}\mathbf{e}^{-\frac{t}{R_1C}}$$

Quindi: $\mathbf{i_C(t) = i_R(t)} = \mathbf{C}\frac{\mathbf{dv_C(t)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{C}\frac{\mathbf{d}\left(\pm \mathbf{V_{iM}} \mp 2\mathbf{V_{iM}}\mathbf{e}^{-\frac{t}{R_1C}}\right)}{\mathbf{dt}} = \mp \frac{2\mathbf{V_{iM}}}{\mathbf{R_1}}\mathbf{e}^{-\frac{t}{R_1C}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v_o(t)} = -\mathbf{R}\cdot \mathbf{i_R(t)} = \mp \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R_1}} 2\mathbf{V_{iM}}\mathbf{e}^{-\frac{t}{R_1C}},$$

in uscita si avrà una forma d’onda impulsiva di ampiezza $\mp \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R_1}} 2\mathbf{V_{iM}}$, che decresce esponenzialmente. In particolare si avrà un impulso positivo in corrispondenza dei fronti di discesa, e un impulso negativo in corrispondenza dei fronti di salita del segnale d’ingresso.