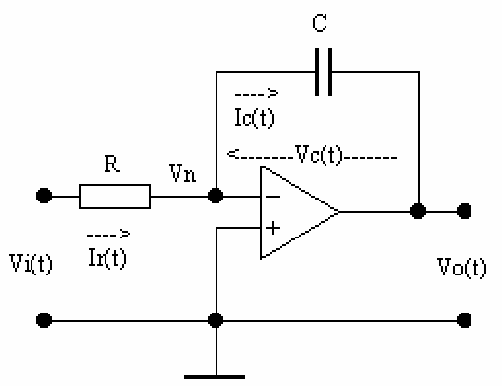
Integratore invertente

L'integratore fornisce in uscita un segnale proporzionale all'integrale del segnale d'ingresso.
Per studiare un circuito con amplificatore operazionale dovremo tenere conto dell'equipotenzialità degli ingressi e che gli ingressi non assorbono corrente.
Il circuito dell'integratore invertente è quello di figura.



Per l'equipotenzialità degli ingressi, si ha: $\mathbf{V_- = V_+ = V_N = 0V}$

Poiché gli ingressi non assorbono corrente, si ha:

$$\mathbf{I_R(t) = I_C(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i - V_N}{R} = C\frac{dV_C}{dt} = C\frac{d(V_N - V_o)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i}{R} = -C\frac{dV_o}{dt}}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \quad \frac{dV_o}{dt} = -\frac{V_i}{RC}}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili. La soluzione $\mathbf{V_o(t)}$ di tale equazione differenziale è una funzione che deve soddisfare l'equazione. Separiamo le variabili e isoliamo $\mathbf{dV_o}$ e integriamo ambo i membri tra **0** e **t** cui corrispondono $\mathbf{V_o(0)}$ e $\mathbf{V_o(t)}$:

$$\mathbf{dV_O = -\frac{1}{RC}\cdot V_i dt \quad \Rightarrow \quad \int_{V_o(0)}^{V_o(t)} dV_o = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_i dt \quad \Rightarrow \quad V_o(t) - V_o(0) = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_i dt \quad \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \quad V_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_i dt + V_o(0)}$$

Al tempo $\mathbf{t = 0}$, $\mathbf{V_o(t)}$ è uguale alla differenza di potenziale ai capi della capacità $\mathbf{V_C(t)}$.

Se la capacità è inizialmente scarica sarà $\mathbf{V_o(0)=0}$, pertanto: $\mathbf{V_o(t)=-\frac{1}{RC}\int_0^t V_i dt}$

Che evidenzia la proporzionalità della tensione d'uscita dall'integrale della tensione d'ingresso.

Risposta all'onda sinusoidale

Mettiamo in ingresso un segnale sinusoidale con fase nulla: $\mathbf{V_i(t)=V_{iM}\,sen\,\omega t}$

e si assume che al tempo $\mathbf{t=0}$ $\mathbf{V_o(t)}$ assuma il suo valore massimo $\mathbf{V_o(0)=V_{oM}=\frac{V_{iM}}{\omega RC}}$

$$\mathbf{V_o(t)=-\frac{1}{RC}\int_0^t V_i dt+V_o(0)=-\frac{1}{RC}\int_o^t V_{iM}\,sen\,\omega t dt+V_o(0)=-\frac{V_{iM}}{\omega RC}\Big|-\cos\omega t\Big|_0^t+V_o(0)=}$$

$$\mathbf{=\frac{V_{iM}}{\omega RC}\cdot(\cos\omega t-1)+V_O(0)=\frac{V_{iM}}{\omega RC}\cdot(\cos\omega t-1)+\frac{V_{iM}}{\omega RC}=\frac{V_{iM}}{\omega RC}\cdot\cos\omega t=V_{oM}\cos\omega t}$$

$\mathbf{V_o(t)}$ è una cosinusoide, ossia è un segnale sinusoidale in anticipo di 90° su $\mathbf{V_i(t)}$.

Risposta all'onda quadra

Un segnale ad onda quadra è un segnale periodico: $\mathbf{V(t+kT)=V(t)}$, ossia riassume lo stesso valore incrementando o decrementando il tempo di multipli interi del periodo T; ed è anche un segnale dispari: $\mathbf{V(-t)=V(t)}$, aumentando o diminuendo di $\mathbf{\frac{T}{2}}$ cambia di segno. L'espressione che descrive matematicamente un segnale ad onda quadra è il seguente:

$$\mathbf{V_i(t)=\begin{cases} E \quad per \quad kT\le t<\frac{T}{2}+kT \\ \\ -E \quad per \quad \frac{T}{2}+kT\le t<T+kT \end{cases}}$$

Per $\mathbf{0\le t<\frac{T}{2}}$, si ha:

$$\mathbf{V_o(t)=-\frac{1}{RC}\int_0^t E dt+V_o(0)=-\frac{E}{RC}\int_0^t dt+V_o(0)=-\frac{E}{RC}|t|_0^t+V_o(0)=-\frac{E}{RC}t+V_o(0)}$$

Per $\mathbf{\frac{T}{2} \le t < T}$, si ha:

$$\mathbf{V_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_{\frac{T}{2}}^{t} -E dt + V_o\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{RC}\int_{\frac{T}{2}}^{t} dt + V_o\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{RC}\left|t\right|_{\frac{T}{2}}^{t} + V_o\left(\frac{T}{2}\right) =}$$

$$\mathbf{= \frac{E}{RC}\left(t - \frac{T}{2}\right) + V_o\left(\frac{T}{2}\right)}$$

Il segnale d'uscita è una successione di rampe in salita e di rampe in discesa (onda triangolare a valore medio nullo, essendo a valore medio nullo il segnale d'ingresso) di pendenza $\pm\mathbf{\frac{E}{RC}}$.

Per determinare $\mathbf{V_o(0)}$ e $\mathbf{V_o\left(\frac{T}{2}\right)}$, si impone che sia (data la simmetria del segnale d'uscita rispetto all'asse dei tempi) $\mathbf{V_o(0) = -V_o\left(\frac{T}{2}\right) = V_{oM}}$ e si calcola la prima equazione (rampa decrescente) al tempo $\mathbf{t = \frac{T}{2}}$ imponendo che il valore ottenuto sia uguale a $\mathbf{V_{oM}}$:

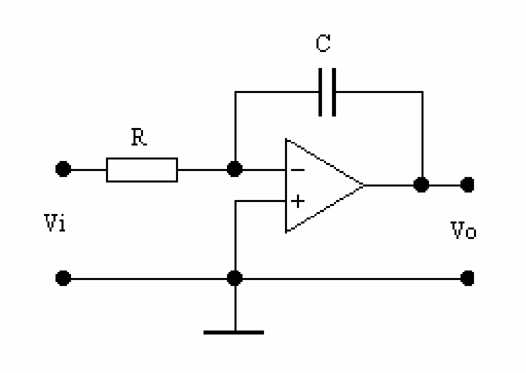
$$\mathbf{V_o\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{E}{RC}\cdot\frac{T}{2} + V_{oM} = -V_{oM} \quad \Rightarrow \quad 2V_{oM} = \frac{ET}{2RC} \quad \Rightarrow \quad V_{oM} = \frac{ET}{4V_{oM}RC}}$$

Riassumendo:

$$\mathbf{V_o(t) = \begin{cases} -\frac{E}{RC}(t + kT) + \frac{ET}{4V_{oM}RC} & \text{per} \quad kT \le t < \frac{T}{2} + kT \\ \\ \frac{E}{RC}\left(t - \frac{T}{2} + kT\right) - \frac{ET}{4V_{oM}RC} & \text{per} \quad \frac{T}{2} + kT \le t < T + kT \end{cases}}$$

Integratore invertente in notazione simbolica

Al fine di evidenziare eventuali inconvenienti che può presentare il circuito integratore, si calcola la funzione d'uscita e la funzione di trasferimento in notazione simbolica.



L'amplificatore operazionale è in configurazione invertente, pertanto:

$$\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{o}} = -\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{C}}}{\overline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{R}}} \cdot \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}} = -\frac{-\mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathbf{C}}}{\mathbf{R}} \cdot \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{j}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{RC}} \cdot \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}}$$

Si scrive la funzione di trasferimento e se ne calcola modulo e fase:

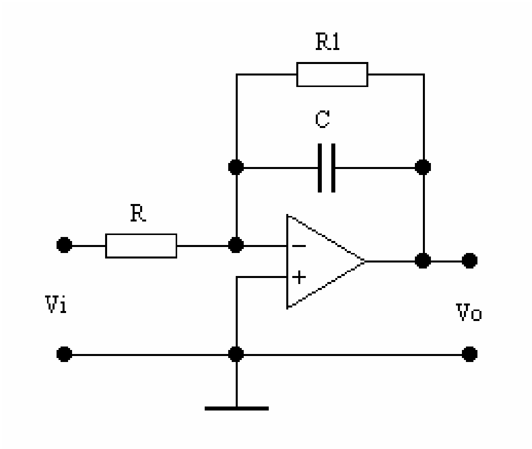
$$\mathbf{G}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}) = \frac{\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{o}}}{\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}}} = \mathbf{j}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{RC}} \left\langle \begin{array}{l} |\mathbf{G}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega})| = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{RC}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\mathbf{fRC}} \\ \\ \boldsymbol{\varphi} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \rightarrow \mathbf{90^\circ} \end{array} \right.$$

Amplificazione e frequenza sono inversamente proporzionali, quindi all’aumentare della frequenza l’amplificazione diminuisce, e viceversa.

– Se $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}) \rightarrow \infty$

– Se $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}(\mathbf{j}\boldsymbol{\omega}) \rightarrow \mathbf{0}$

Il problema si presenta alle basse frequenza, alle quali l'amplificazione tende ad assumere il suo massimo valore. In ingresso sono presenti le tensioni di offset, che sono viste dal circuito come tensioni continue o lentamente variabili nel tempo e vengono integrate con la massima amplificazione, portando l'uscita in zone di funzionamento non lineari rendendo problematico il corretto funzionamento del circuito.
L'elevato valore dell'amplificazione alle basse frequenze è dovuto alla capacità la cui reattanza è inversamente proporzionale alla frequenza, ossia alle basse frequenze la capacità tende ad assumere le caratteristiche di un circuito aperto (reattanza di valore molto elevato). Per impedire che il ramo contenente la capacità assuma un'impedenza troppo elevata, ossia per limitare l'amplificazione alle basse frequenze, si mette in parallelo alla capacità una resistenza di opportuno valore, come riportato in figura.



$$\overline{Z}_{CR_1} = \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} = \frac{-jR_1X_C}{R_1 - jX_C} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1C}$$

$$\overline{V}_o = -\frac{\overline{Z}_{CR_1}}{\overline{Z}_R}\cdot\overline{V}_i = -\frac{\dfrac{R_1}{1+j\omega R_1C}}{R}\cdot\overline{V}_i = -\frac{R_1}{R}\cdot\frac{1}{1+j\omega R_1C}\cdot\overline{V}_i$$

La funzione di trasferimento è:

$$G(j\omega) = \frac{\overline{V}_o}{\overline{V}_i} = -\frac{R_1}{R}\cdot\frac{1}{1+j\omega R_1C} \left\langle \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \dfrac{R_1}{R}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega R_1C)^2}} \\[2ex] \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\omega R_1C \end{array} \right.$$

Se $\omega \to 0 \;\Rightarrow\; \omega R_1C \ll 1 \;\Rightarrow\; \omega R_1C$ **è trascurabile rispetto a** $1 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; |G(j\omega)| = \dfrac{R_1}{R}$ **e** $\varphi = \pi$ **si comporta da amplificatore invertene**

Se $\omega \to \infty \;\Rightarrow\; \omega R_1C \gg 1 \;\Rightarrow\; 1$ **è trascurabile rispetto a** $\omega R_1C \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; |G(j\omega)| = \dfrac{1}{\omega RC}$ **e** $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ **si comporta da integratore invertene**

Il circuito presenta una frequenza di taglio f_t, ossia quella frequenza alla quale il modulo della funzione di trasferimento si riduce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al suo massimo valore.
La pulsazione di taglio si ottiene imponendo che il modulo della funzione di trasferimento, a tale pulsazione, sia $\frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_t R_1 C)^2}} = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_t R_1 C = 1 \Rightarrow \omega_t = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

A tale frequenza la fase subisce una variazione di $\frac{\pi}{4}$:

$$\varphi = \pi - \mathrm{arctg}\,\omega_t R_1 C = \pi - \mathrm{arctg}\frac{1}{R_1 C} R_1 C = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$$

La frequenza a guadagno unitario è quella frequenza alla quale il guadagno (il modulo della funzione di trasferimento alle alte frequenze) vale 1:

$$\frac{1}{\omega_1 RC} = 1 \Rightarrow \omega_1 RC = 1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Le condizioni di progetto, se non ci sono particolare richieste, sono:

$$RC = T \qquad ; \qquad R_1 = 10R$$

dove T è il periodo del segnale d'ingresso.

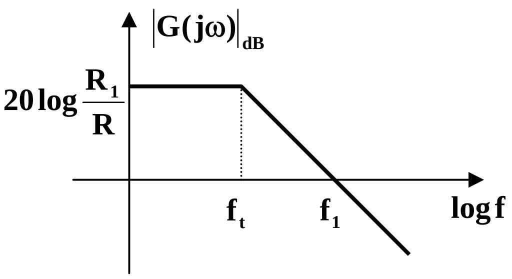


diagramma di Bode del modulo

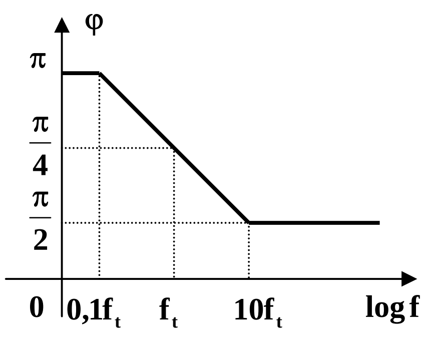


diagramma della fase