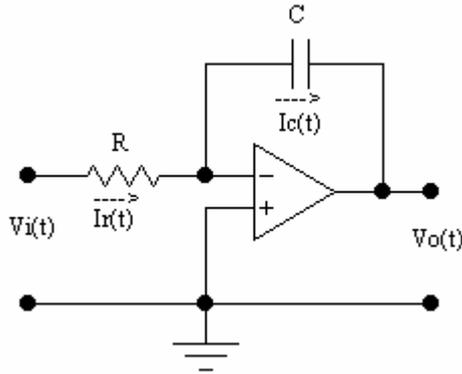


## INTEGRATORE INVERTENTE E INTEGRATORE INVERTENTE REALE

E' un circuito che fornisce in uscita un segnale proporzionale all'integrale del segnale d'ingresso.



Per ottenere la funzione di uscita si sfrutta l'equipotenzialità degli ingressi e che gli ingressi non assorbono corrente.

Per l'equipotenzialità degli ingressi, l'ingresso invertente si trova a zero volt di massa virtuale  $V_- = V_+ = 0$ .

Poiché gli ingressi non assorbono corrente, la corrente nella capacità risulterà uguale alla corrente nella resistenza:  $I_C(t) = I_r(t)$ . Le relazioni che legano le correnti nella capacità e nella resistenza alle tensioni ai loro capi sono:

$$I_C = -C \cdot \frac{dV_o}{dt} = \frac{V_i}{R} = I_r \Rightarrow \frac{dV_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot V_i(t) \Rightarrow dV_o = -\frac{1}{RC} \cdot V_i(t)dt$$

Integrando membro a membro rispettivamente tra  $V_o(0)$  e  $V_o(t)$ , e  $t = 0$  e  $t$ , si ottiene la funzione d'uscita:

$$\int_{V_o(0)}^{V_o(t)} dV_o = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t V_i(t)dt \Rightarrow V_o(t) - V_o(0) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t V_i(t)dt \Rightarrow \\ \Rightarrow V_o(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t V_i(t)dt + V_o(0)$$

Il segnale d'uscita risulta, quindi, proporzionale all'integrale del segnale d'ingresso. Il termine  $V_o(0)$  tiene conto della tensione cui è carica la capacità all'inizio del transitorio. Nel caso in cui la capacità è inizialmente scarica,  $V_o(0) = 0$ , la funzione d'uscita diventa:

$$V_o(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t V_i(t)dt$$

che evidenzia meglio la proporzionalità dell'uscita dall'integrale del segnale d'ingresso.

Se si utilizzano solo segnali sinusoidali, si può risolvere il circuito in notazione simbolica. Si ottiene una funzione d'uscita in funzione della frequenza, che fornisce informazioni sulla risposta in frequenza del circuito.

$$\bar{V}_o = -\frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_R} \cdot \bar{V}_i = -\frac{-jX_C}{R} \cdot \bar{V}_i = j\frac{1}{\omega RC} \bar{V}_i \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = j\frac{1}{\omega RC}$$

Si calcola modulo e fase della funzione di trasferimento:

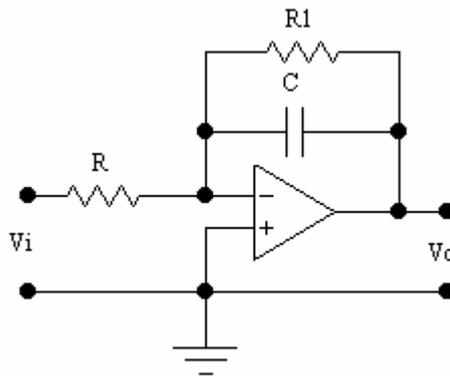
$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = j\frac{1}{\omega RC} \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

Il segnale d'uscita  $V_o$  è in anticipo di  $90^\circ$  rispetto a  $V_i$  e, a parità di  $R$  e di  $C$ , la sua ampiezza aumenta al diminuire di  $\omega$  e quindi della frequenza del segnale d'ingresso. Il suo comportamento è critico alle basse frequenze.

L'amplificazione cresce al diminuire della frequenza, così come l'ampiezza: non si dispone di amplificatori operazionali con amplificazione infinita né la tensione d'uscita può eccedere quella d'alimentazione; inoltre, gli offset d'ingresso (segnali indesiderati dovuti a sbilanciamento dell'uscita), lentamente variabili nel tempo, verranno integrati con massima amplificazione, provocando malfunzionamento del circuito.

Per potere utilizzare il circuito bisogna limitare l'amplificazione alle basse frequenze.

Al diminuire della frequenza aumenta  $X_C$  (fino a tendere a diventare un circuito aperto). Per impedire che il ramo di retroazione diventi, alle basse frequenze, un circuito aperto, si inserisce in parallelo a  $C$  una resistenza  $R_1$  di opportuno valore, come in figura. Tale circuito è detto integratore invertente reale.



In notazione simbolica, si ha:

$$\bar{V}_o = -\frac{-jR_1 X_C}{R_1 - jX_C} \cdot \bar{V}_i = -\frac{R_1}{R} \cdot \frac{-jX_C}{R_1 - jX_C} \cdot \bar{V}_i = -\frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \cdot \bar{V}_i$$

la cui funzione di trasferimento è:

$$G(j\omega) = -\frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} \\ \varphi = \pi - \arctg \omega R_1 C \end{array} \right.$$

Si analizza il comportamento del circuito alle alte e alle basse frequenze.

### Basse frequenze della banda

– Se  $\omega \rightarrow 0$ , si ha:  $\omega R_1 C \ll 1 \Rightarrow \omega R_1 C$  è trascurabile rispetto 1  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{R_1}{R} \\ \varphi = \pi \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow G(j\omega) = -\frac{R_1}{R}$  il circuito si comporta da amplificatore invertente

### Alte frequenze della banda

– Se  $\omega \rightarrow \infty$ , si ha:  $\omega R_1 C \gg 1 \Rightarrow 1$  è trascurabile rispetto a  $\omega R_1 C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega RC} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow G(j\omega) = -j\frac{1}{\omega RC}$  il circuito si comporta da integratore invertente

Il circuito si comporta da amplificatore invertente, con limitazione del guadagno, alle basse frequenze e da integratore alle alte frequenze.

Per delimitare, rispetto alla frequenza, i due tipi di funzionamento, si introduce la frequenza di taglio.

La **frequenza di taglio** è quella frequenza alla quale l'ampiezza dell'uscita, ovvero il modulo della funzione di trasferimento, si riduce di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto al massimo valore possibile e la fase subisce una variazione di  $\pi/4$  (per un circuito ad una sola costante di tempo). Si calcola imponendo

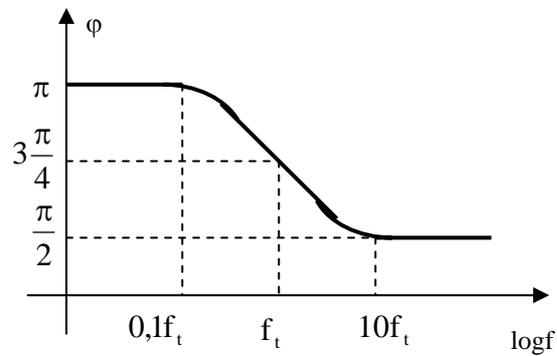
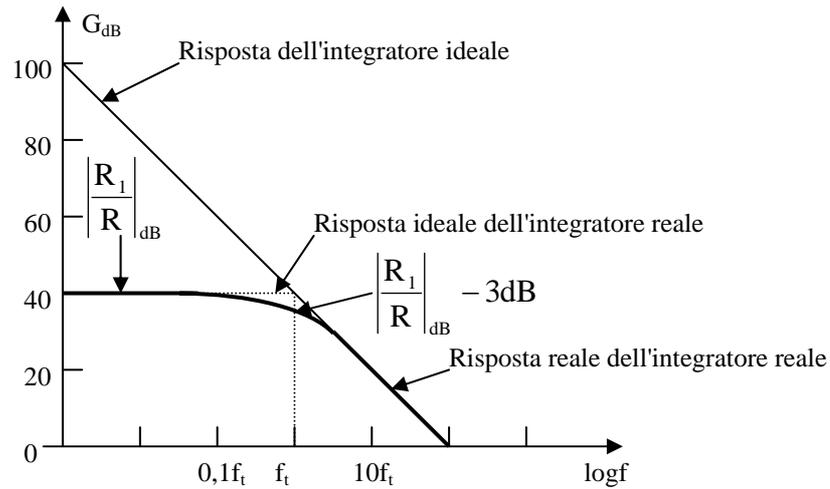
che alla pulsazione  $\omega_t$  il modulo della funzione di trasferimento sia uguale a  $|G(j\omega)| = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_t R_1 C)^2}} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_t R_1 C} = 1 \Rightarrow \omega_t = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

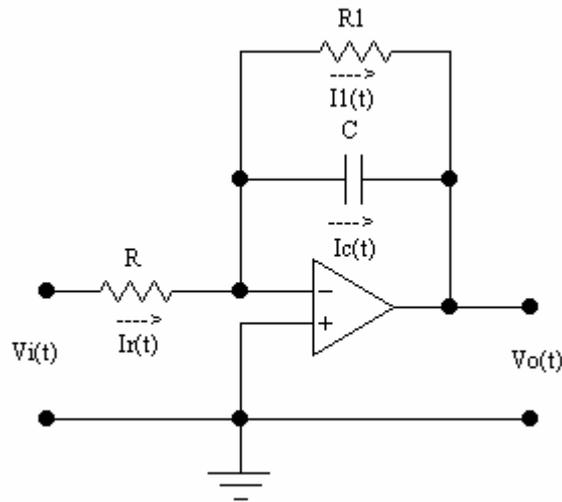
La risposta del circuito, all'aumentare della frequenza, passa da quella di un amplificatore invertente a quella di un integratore. Tale passaggio è, ovviamente, graduale. Nell'intorno della frequenza di taglio si ha la transizione tra i due tipi di risposta. Commettendo un errore trascurabile, si può affermare che:

- al di sotto di  $0,1f_t$  il circuito si comporta sicuramente da amplificatore invertente;
- al di sopra di  $10f_t$  si comporta sicuramente da integratore;
- tra tali frequenze si ha il passaggio da un comportamento (amplificatore invertente) all'altro (integratore).

Nelle figure sono riportate le curve di risposte del modulo e della fase della funzione di trasferimento.



Se il segnale d'ingresso non è sinusoidale si deve risolvere il circuito in funzione del tempo.



Si assume che gli ingressi sono equipotenziali,  $V_- = V_+ = 0$ , e che gli ingressi non assorbono corrente,  $i_r(t) = i_c(t) + i_1(t)$ .

$$i_r(t) = \frac{v_i(t)}{R} \quad ; \quad i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = -C \frac{dv_o(t)}{dt} = -Cv_o'(t) \quad ; \quad i_1(t) = -\frac{v_o(t)}{R_1}$$

$$\frac{v_i(t)}{R} = -Cv_o'(t) - \frac{v_o(t)}{R_1} \Rightarrow v_o'(t) + \frac{1}{R_1 C} v_o(t) = -\frac{1}{RC} v_i(t)$$

Questa è un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea del tipo:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

la cui soluzione generale è:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + k \right].$$

Data la corrispondenza:

$$y = v_o(t) ; y' = v_o'(t) ; p(x) = \frac{1}{R_1 C} ; q(x) = -\frac{1}{RC} v_i(t) ; dx = dt ,$$

si ha:

$$v_o(t) = e^{-\int \frac{dt}{R_1 C}} \left[ \int -\frac{v_i(t)}{RC} e^{\int \frac{dt}{R_1 C}} dt + k \right] = e^{-\frac{t}{R_1 C}} \left[ -\frac{1}{RC} \int v_i(t) e^{\frac{t}{R_1 C}} dt + k \right]$$

Il valore della costante k viene determinato assegnando le condizioni iniziali. La risposta del circuito dipende, ovviamente, dalla forma d'onda d'ingresso.

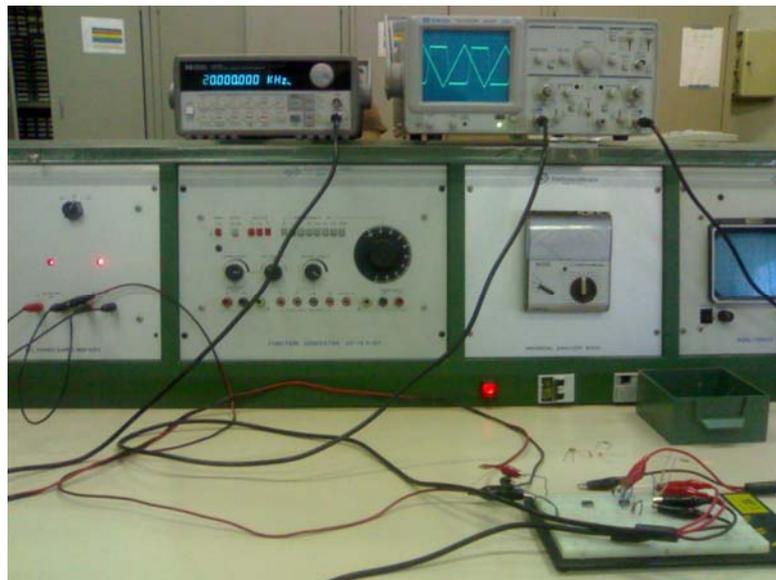
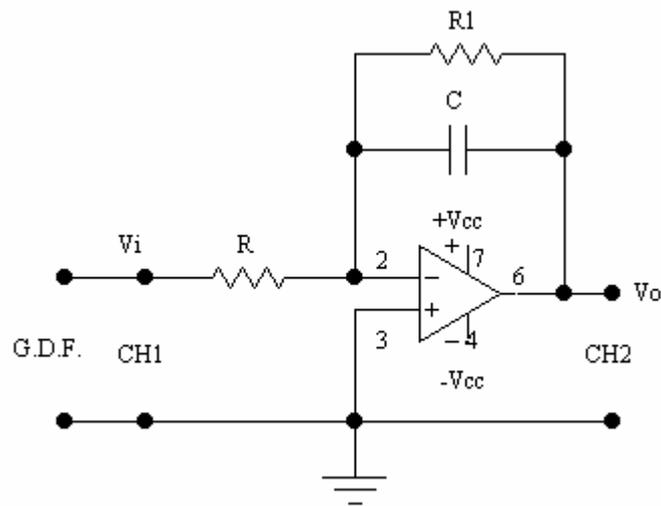


Foto del circuito in esame e della strumentazione e apparecchiature utilizzate.

**RILIEVO PER PUNTI DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA E IN FASE DI UN  
CIRCUITO DERIVATORE REALE INVERTENTE.  
RISPOSTA ALL'ONDA QUADRA E TRIANGOLARE.**

Il rilievo della curva di risposta per punti viene effettuata con misure oscillografiche. Al fine di ottimizzare la visualizzazione delle forme d'onda d'ingresso e d'uscita, bisogna fissare la frequenza limite minima a 200Hz. A tale frequenza il circuito deve comportarsi sicuramente da derivatore. Si fissa, pertanto, la frequenza di taglio a 5KHz (più di 10 volte la frequenza di 200Hz); in tale modo si potrà evidenziare e visualizzare in modo soddisfacente il comportamento del circuito sia alle basse frequenze sia alle alte frequenze.

**Circuito di verifica**



Si utilizza l'amplificatore operazionale TL081 con una alimentazione duale  $V_{CC} = \pm 12V$ . Si limita a 10 il valore massimo dell'amplificazione.

Dalla frequenza di taglio si calcola il valore di  $R_1C$ :

$$f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C} \Rightarrow R_1 C = \frac{1}{2\pi f_t} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3} = 31,83 \mu s$$

Si fissa  $C = 470 pF$  e si calcola  $R_1 = \frac{31,83 \cdot 10^{-6}}{C} = \frac{31,83 \cdot 10^{-6}}{4,010 \cdot 10^{-12}} = 68 k\Omega$ .

Si calcola  $R$ :  $A = -\frac{R_1}{R} = -10 \Rightarrow R = \frac{R_1}{10} = \frac{68 \cdot 10^3}{10} = 6,8 k\Omega$

Si rileva la risposta in frequenza utilizzando un segnale sinusoidale d'ingresso di ampiezza 0,5V,  $v_i(t) = [0,5 \text{sen}(2\pi f t)]V$ .

All'aumentare della frequenza, a partire da 200Hz, il comportamento del circuito passerà da quello di amplificatore invertente a quello di integratore.

Si utilizzano un generatore di funzione con frequenzimetro e un oscilloscopio a doppia traccia.

## Procedimento

1. si monta il circuito e si collega l'alimentazione;
2. si collega in ingresso il generatore di funzione e il canale CH1 dell'oscilloscopio; si collega in uscita il canale CH2 dell'oscilloscopio;
3. si seleziona l'onda sinusoidale e si regola l'ampiezza a 0,5V e la frequenza a 200Hz.
4. del segnale d'uscita si misura l'ampiezza e il tempo  $\Delta t$  di cui è anticipato rispetto al segnale d'ingresso;
5. si calcola  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{V_{oM}}{V_{iM}}$  e  $\varphi = 360^\circ \cdot f \cdot \Delta t$  e si riportano i valori nella tabella;
6. si regola la frequenza, in successione, ai valori riportati in tabella e si ripetono i punti 4 e 5;
7. si riportano i valori del modulo della funzione di trasferimento ed i valori della fase in funzione della frequenza su carta semilogaritmica e si tracciano i grafici del modulo e della fase della funzione di trasferimento;
8. dal grafico (della risposta in frequenza) di  $|G(j\omega)|_{dB}$  si determina la frequenza di taglio in corrispondenza del valore 17dB;
9. dallo stesso grafico si scelgono due punti nel tratto rettilineo decrescente e si ricava la pendenza.

Nella tabella, per un immediato riscontro, sono riportati anche i valori calcolati di  $V_{oM}$ , di  $|G(j\omega)|_{dB}$  e di  $\varphi$ . Le formule usate per il calcolo sono:

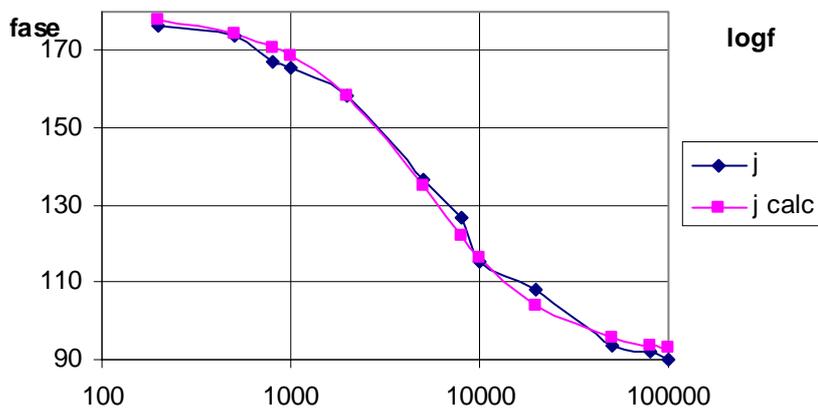
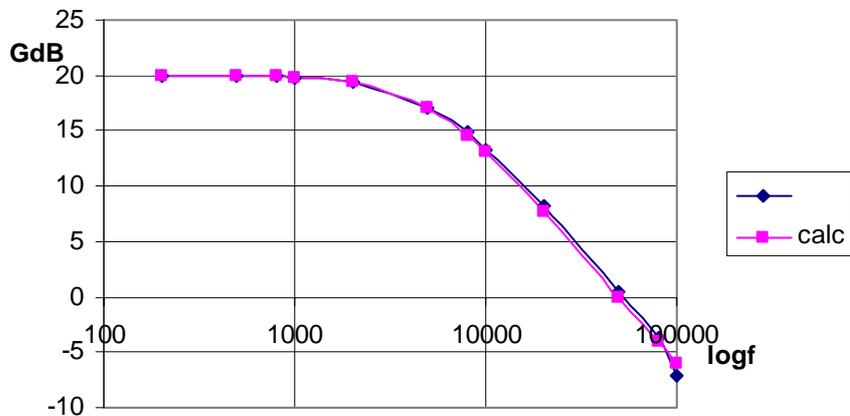
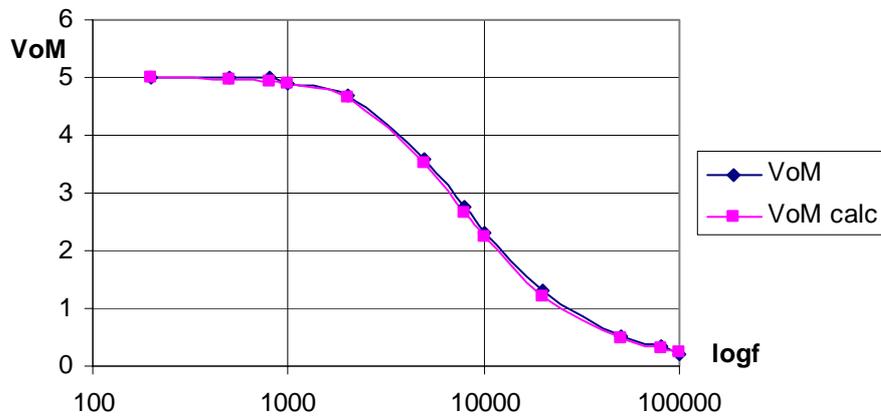
$$|G(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{R_1}{R \cdot \sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} = 20 \cdot \log \frac{R_1}{R \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_t}\right)^2}}$$

$$V_{oM} = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_t}\right)^2}} \cdot V_{iM} \quad \varphi' = 180^\circ - \arctg \frac{f}{f_t}$$

## Tabella dei valori misurati e calcolati

Hz	Volt			Adimensionale		$\mu s$	Gradi	
f	$V_{iM}$	$V_{oM}$	$V_{oM}$ calc	$ G(j\omega) _{dB}$	$ G(j\omega) _{dB}$ calc	$\Delta t$	$\varphi$	$\varphi$ calc
200	0,5	5	4,996	20	19,99	2450	176,4	177,71
500	0,5	5	4,975	20	19,96	965	173,7	174,29
800	0,5	5	4,937	20	19,89	580	167,04	170,91
1000	0,5	4,9	4,903	19,82	19,83	460	165,6	168,69
2000	0,5	4,7	4,64	19,46	19,36	220	158,4	158,20
5000	0,5	3,6	3,53	17,15	16,99	76	136,80	135,00
8000	0,5	2,75	2,65	14,81	14,48	44	126,72	122,00
10000	0,5	2,3	2,24	13,25	13,01	32	115,20	116,56
20000	0,5	1,3	1,21	8,30	7,69	15	108,00	104,04
50000	0,5	0,53	0,497	0,51	-0,043	5,2	93,60	95,71
80000	0,5	0,33	0,312	-3,61	-4,10	3,2	92,16	93,57
100000	0,5	0,22	0,25	-7,13	-6,03	2,5	90,00	92,86

Di seguito si riportano i grafici di  $V_{oM}$ ,  $|G(j\omega)|_{dB}$  e  $\varphi$  in funzione della frequenza in scala logaritmica.

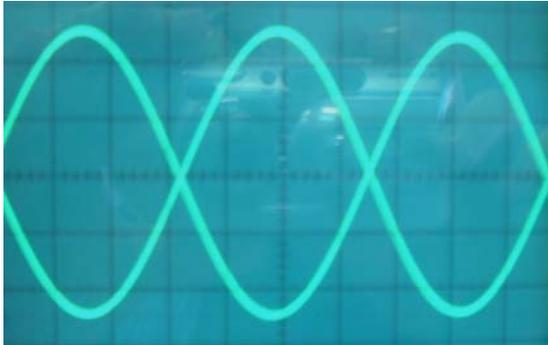


I grafici evidenziano la risposta caratteristica di un circuito integratore. La frequenza di taglio può essere valutata a circa 5KHz.

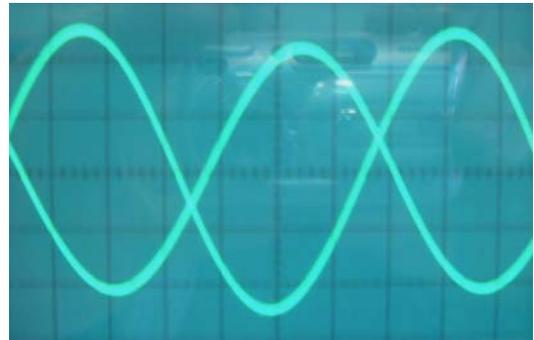
Per calcolare la pendenza del tratto inclinato del grafico di  $|G(j\omega)|_{dB}$ , scegliamo di punti di coordinate (10000 ; 13,25) e (100000 ; -7,13), in modo di avere una variazione della frequenza di una decade:

$$\frac{\Delta|G(j\omega)|}{\Delta f} = \frac{-7,13 - 13,25}{100000 - 10000} = -20,38 \frac{dB}{decade}$$

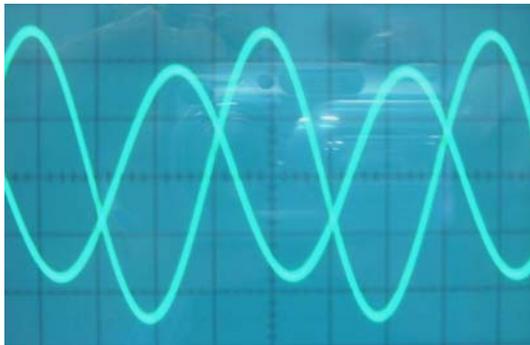
Si riportano le foto degli oscillogrammi alle frequenze di 300Hz, 3KHz, 5KHz, 20KHz e 50KHz, da cui risulta evidente come il segnale d'uscita, prima in controfase con il segnale d'ingresso (funzionamento da amplificatore invertente), in ultimo risulta, con ridotta ampiezza, sfasato in anticipo di 90° rispetto al segnale d'ingresso (funzionamento da integratore).



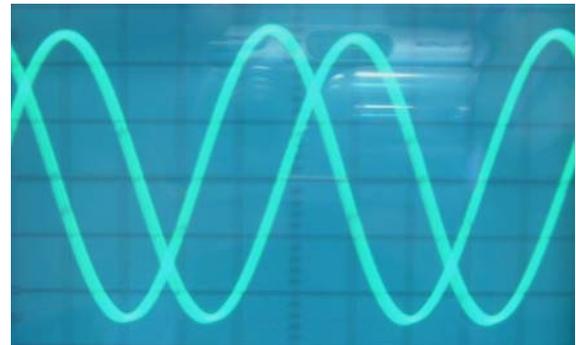
f = 300Hz CH2 a 2V/div



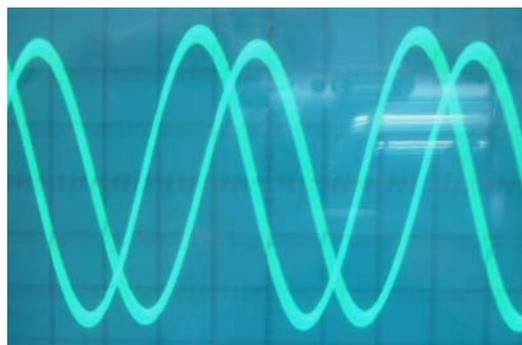
f = 3KHz CH2 a 2V/div



f = 5KHz CH2 a 2V/div



f = 30KHz CH2 a 0,5V/div



f = 50KHz CH2 a 0,2V/div

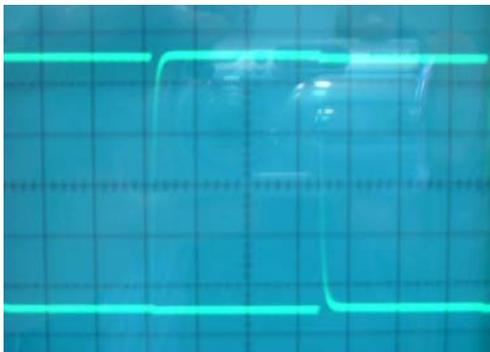
### Risposta all'onda quadra e all'onda triangolare

Al fine di rilevare la risposta all'onda quadra e triangolare, si fissa l'ampiezza a 0,5V, si rilevano gli oscillogrammi e si misura l'ampiezza a 300Hz, 3KHz, 5KHz, 30KHz e 50KHz.

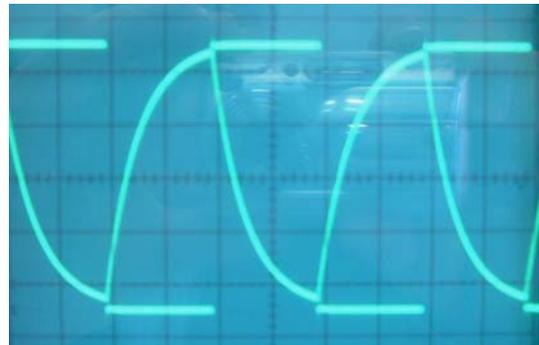
## Onda quadra

- A 300Hz e a 3KHz il circuito si comporta da amplificatore invertente, fornendo in uscita un'onda quadra sfasata di  $180^\circ$  rispetto a quella in ingresso, e amplificata di 10 volte, nella quale si notano i transitori di carica e di scarica della capacità.
- A 5KHz si hanno transitori di carica e scarica della capacità, ma la durata dei semiperiodi non è sufficiente a che si esaurisca il transitorio. La tensione picco-picco è inferiore a 10V.
- A 20KHz il segnale d'uscita tende ad assumere una forma triangolare, ma si notano chiaramente leggeri transitori.
- A 50KHz l'uscita risulta di forma triangolare. Presenta piccoli overshoot all'inizio dei transitori dovuti alle commutazioni del segnale d'ingresso..

Alle su citate frequenze vengono riportate le foto degli oscillogrammi. Il canale CH1 è posizionato a 0,2V/div. Nella tabella si riportano i valori delle ampiezze misurate e quelli calcolati.



f = 300Hz CH2 a 2V/div



f = 5KHz CH2 a 2V/div



f = 20KHz CH2 a 2V/div

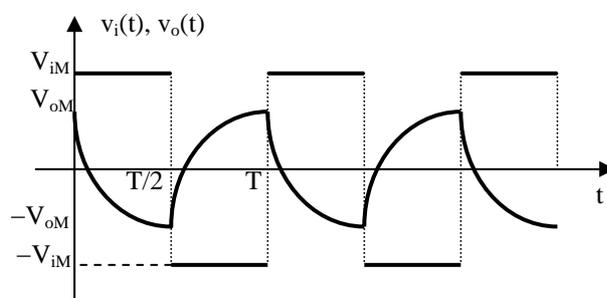


f = 30KHz CH2 a 1V/div

Onda quadra	f = 300Hz	f = 3KHz	f = 5KHz	f = 20KHz	f = 50KHz
	CH2 a 0,1V/div	CH2 a 1V/div	CH2 a 1V/div	CH2 a 2V/div	CH2 a 2V/div
	Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
	$V_{opp}$	$V_{opp}$	$V_{opp}$	$V_{opp}$	$V_{opp}$
Valori mis.	10	10	9,2	4	1,7
Valori calc.	10	9,89	9,16	3,72	1,55

Il calcolo dei valori teorici aspettati viene eseguito usando le seguenti equazioni risolutive ottenute dall'equazione differenziale associata al circuito:

$$v_o(t) = \begin{cases} -\frac{R_1}{R} V_{iM} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2R_1C}}} e^{-\frac{t-kT}{R_1C}} \right) & \text{per } kT \leq t < \frac{T}{2} + kT \\ \frac{R_1}{R} V_{iM} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2R_1C}}} e^{-\frac{\frac{T}{2}-kT}{R_1C}} \right) & \text{per } \frac{T}{2} + kT \leq t < T + kT \end{cases}$$



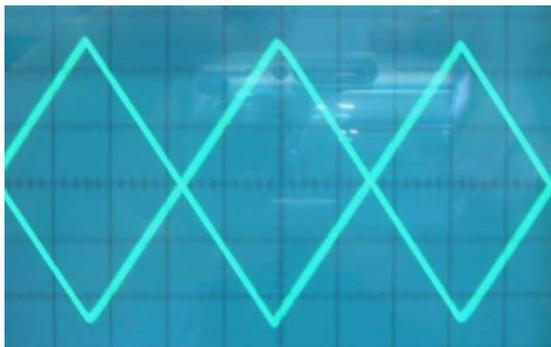
Restringendo l'intervallo di tempo che interessa ad un periodo,  $V_{oM}$  corrisponde al valore che l'uscita assume al tempo  $t = 0$ :

$$v_{opp} = 2v_{oM} = v_o(0) = -2 \frac{R_1}{R} \cdot V_{iM} \cdot \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2R_1C}}} \right) = -2 \frac{R_1}{R} \cdot V_{iM} \cdot \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right)$$

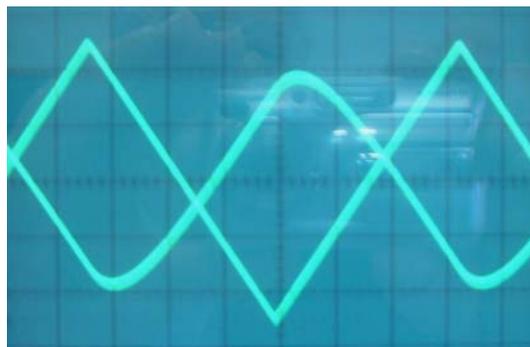
### Onda triangolare

- A 300Hz il circuito si comporta da amplificatore invertente, fornendo in uscita un'onda triangolare sfasata di  $180^\circ$  rispetto a quella in ingresso, e amplificata di 10 volte.
- A 3KHz il segnale d'uscita non è esattamente triangolare. Il massimo e il minimo risultano arrotondati e comincia a spostarsi in anticipo rispetto al segnale d'ingresso.
- A 5KHz le deformazioni su citate sono molto più accentuate.
- A 20KHz il segnale d'uscita tende ad assumere la forma di archi di parabola. Si notano comunque piccole distorsioni.
- A 50KHz il segnale d'uscita è costituito da archi di parabola.

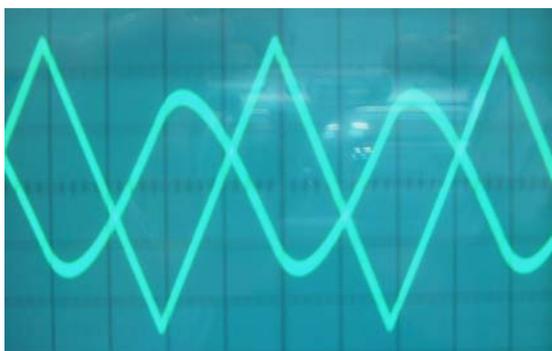
Alle su citate frequenze vengono riportate le foto degli oscillogrammi. Il canale CH1 è posizionato a 0,2V/div. Nella tabella si riportano valori delle ampiezze misurate e quelli calcolati.



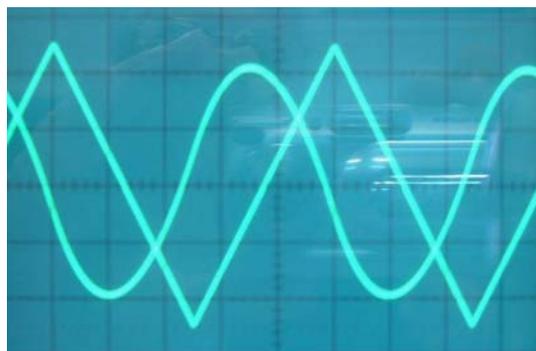
f = 300Hz CH2 a 2V/div



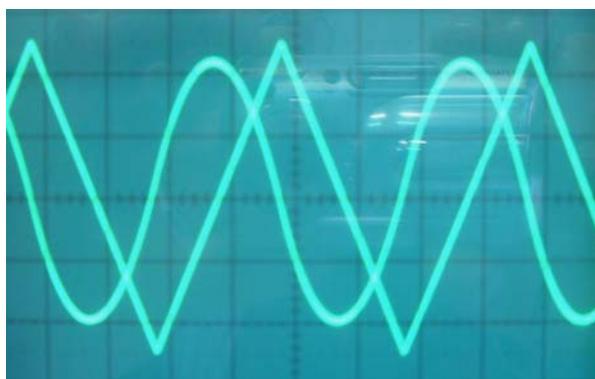
f = 3KHz CH2 a 2V/div



f = 5KHz CH2 a 2V/div



f = 20KHz CH2 a 0,5V/div

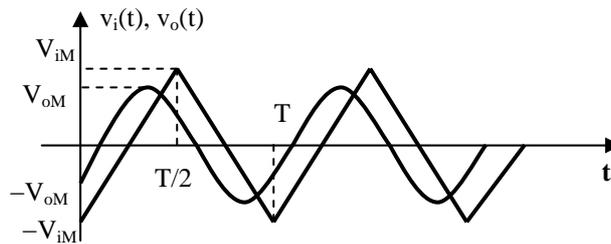


f = 50KHz CH2 a 0,2V/div

<b>Onda triangolare</b>	f = 200Hz	f = 3KHz	f = 5KHz	f = 30KHz	f = 30KHz
	CH2 a 0,1V/div	CH2 a 1V/div	CH2 a 1V/div	CH2 a 2V/div	CH2 a 2V/div
	Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
	V <sub>opp</sub>				
Valori mis.	10	7,4	6	2	0,84
Valori calc.	9,73	7,4	5,84	1,9	0,78

Il calcolo dei valori teorici aspettati viene eseguito usando le seguenti equazioni risolutive ottenute dall'equazione differenziale associata al circuito:

$$v_o(t) = \begin{cases} -\frac{R_1}{R} \left[ \frac{4V_{iM}}{T} (t - kT) - V_{iM} - \frac{4R_1 C V_{iM}}{T} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{t-kT}{R_1 C}}} \right) \right] & \text{per } kT \leq t < \frac{T}{2} + kT \\ \frac{R_1}{R} \left[ \frac{4V_{iM}}{T} \left( t - \frac{T}{2} - kT \right) - V_{iM} - \frac{4R_1 C V_{iM}}{T} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{t-\frac{T}{2}-kT}{R_1 C}}} \right) \right] & \text{per } \frac{T}{2} + kT \leq t < T + kT \end{cases}$$



Restringendo l'intervallo di tempo che interessa ad un periodo, per calcolare  $V_{oM}$  bisogna calcolare l'istante in cui il segnale raggiunge l'ampiezza massima. Si deve effettuare uno studio di massimo e minimo sulla funzione d'uscita. Si limita l'indagine al primo semi periodo:

$$v_o'(t) = -\frac{R_1}{R} \left[ \frac{4V_{iM}}{T} - \frac{4\tau V_{iM} \cdot 2}{T \cdot \left( 1 + e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)} \cdot \left( -\frac{1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \geq 0 \Rightarrow -1 + \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \geq \frac{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}{2} \Rightarrow t \leq \tau \ln \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \Rightarrow t_M = \tau \ln \frac{2}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

$t = t_M$  è un punto di massimo perché la funzione è crescente per  $t < t_M$  ed è decrescente per  $t > t_M$ . Per calcolare il valore  $V_{oM}$ , e quindi  $V_{opp}$ , bisogna prima calcolare  $t_M$  e quindi:

$$v_{opp} = v_o(t_M) = -\frac{R_1}{R} \left[ \frac{4V_{iM}}{T} \cdot t_M - V_{iM} - \frac{4R_1 C V_{iM}}{T} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{t_M}{R_1 C}}} \right) \right] =$$

$$= -\frac{R_1}{R} \left[ \frac{4V_{iM}}{T} \cdot t_M - V_{iM} - \frac{4\tau V_{iM}}{T} \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{-\frac{t_M}{\tau}}} \right) \right]$$