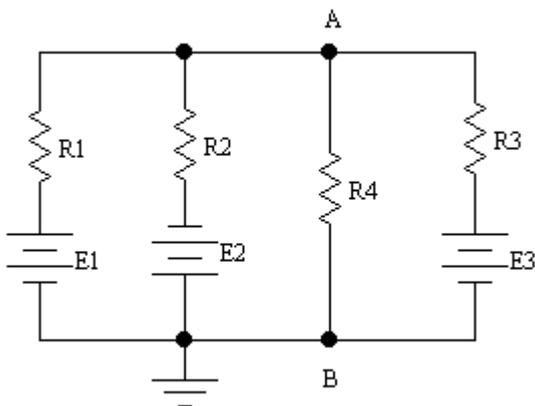


Supervisore Prof. **Giancarlo Fionda**
 Insegnante di Elettronica

VERIFICA DEL TEOREMA DI MILLMAN E DELLA LEGGE DI OHM GENERALIZZATA AI TRONCHI

Si verifica un circuito costituito da rami in parallelo con più generatori. Si misurano le cadute di tensione su ogni resistenza, e da esse le correnti, e si confrontano i valori ottenuti con quelli calcolati applicando al circuito i principi di Kirchhoff e con quelli calcolati applicando il teorema di Millman e la legge di Ohm generalizzata ai tronchi (rami). I valori sperimentali devono risultare molto prossimi a quelli teorici.

Circuito da verificare



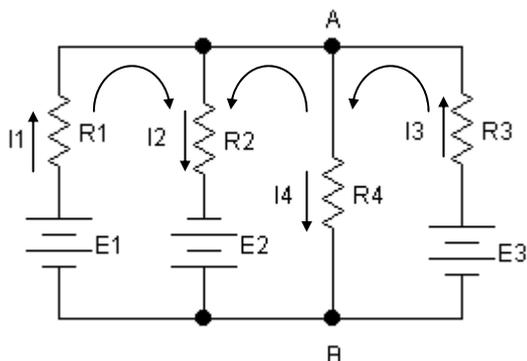
$$E_1 = E_2 = E_3 = 12V$$

$$R_1 = 2,7k\Omega ; R_2 = 1,5k\Omega$$

$$R_3 = 2,2k\Omega ; R_4 = 1k\Omega$$

Calcolo dei valori da misurare.

Risoluzione applicando i principi di Kirchhoff.



$$\text{Nodi: } n = 2$$

$$\text{Nodi indipendenti: } n - 1 = 1$$

$$\text{Rami: } r = 4$$

$$\text{Maglie indipendenti: } m = r - (n - 1) = 3$$

Si scrivono le equazioni al nodo e alle maglie e si calcolano le correnti risolvendo il sistema di 4 equazioni ottenuto.

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2 + I_4, \\ E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \\ E_2 = R_2 \cdot I_2 - R_4 \cdot I_4 \\ E_3 = R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 - I_3 + I_4 \\ 2,2 \cdot 10^3 I_1 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 = 24 \\ 1,5 \cdot 10^3 I_2 - 1 \cdot 10^3 I_4 = 12 \\ 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1 \cdot 10^3 I_4 = 12 \end{cases}$$

Si risolve la seconda equazione rispetto a I_1 e la terza rispetto I_4 :

$$(a) \quad I_1 = 24 - 1,5 \cdot 10^3 I_2 \quad ; \quad (b) \quad I_4 = \frac{1,5 \cdot 10^3 I_2 - 12}{1 \cdot 10^3}$$

Si sostituisce la (b) nella quarta equazione e si risolve rispetto I_3 :

$$(c) \quad 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 - 12 = 12 \Rightarrow 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 = 24 \Rightarrow I_3 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 I_2}{2,2 \cdot 10^3}$$

Sostituendo le (a), (b), (c) nella prima equazione si calcola la corrente I_2 :

$$\frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2}{2,7 \cdot 10^3} + \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2}{2,2 \cdot 10^3} = 10^3 \cdot I_2 + \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2 - 12}{1 \cdot 10^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 52,8 - 3,3 \cdot 10^3 I_2 + 64,8 - 4,05 \cdot 10^3 I_2 = 5,94 \cdot 10^3 I_2 + 8,91 \cdot 10^3 I_2 - 71,28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22,2 \cdot 10^3 I_2 = 188,88 \Rightarrow I_2 = \frac{188,88}{22,2 \cdot 10^3} = 8,51 \text{mA}$$

Sostituendo nelle (a), (b), (c) si calcolano le correnti I_1 : I_3 I_4 :

$$I_1 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3}}{2,7 \cdot 10^3} = 4,16 \text{mA} \quad ; \quad I_4 = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3} - 12}{1 \cdot 10^3} = 0,765 \text{mA}$$

$$I_3 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^3} = 5,1 \text{mA}$$

Si verifica, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione al nodo, la correttezza dei risultati:

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \Rightarrow 4,16 \cdot 10^{-3} + 5,1 \cdot 10^{-3} = 8,51 \cdot 10^{-3} + 0,765 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 9,26 \cdot 10^{-3} = 9,27 \cdot 10^{-3}$$

Le cadute di tensione sulle resistenze si calcolano applicando ai loro capi la legge di Ohm:

$$V_1 = R_1 I_1 = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 4,16 \cdot 10^{-3} = 11,23 \text{V} \quad ; \quad V_2 = R_2 I_2 = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3} = 12,765 \text{V}$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 2,2 \cdot 10^3 \cdot 5,1 \cdot 10^{-3} = 11,22 \text{V} \quad ; \quad V_4 = V_{AB} = R_4 I_4 = 1 \cdot 10^3 \cdot 0,765 \cdot 10^{-3} = 0,765 \text{V}$$

Riassumendo: $I_1 = 4,16\text{mA}$; $I_2 = 8,51\text{mA}$; $I_3 = 5,1\text{mA}$; $I_4 = 0,765\text{mA}$;
 $V_1 = 11,23\text{V}$; $V_2 = 12,765\text{V}$; $V_3 = 11,22\text{V}$; $V_4 = 0,765\text{V}$;

Risoluzione applicando il teorema di Millman e la legge di Ohm generalizzata ai tronchi

Si calcola la differenza di potenziale tra i punti A e B:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{12}{2,7 \cdot 10^3} - \frac{12}{1,5 \cdot 10^3} + \frac{12}{2,2 \cdot 10^3}}{\frac{1}{2,7 \cdot 10^3} + \frac{1}{1,5 \cdot 10^3} + \frac{1}{2,2 \cdot 10^3} + \frac{1}{1 \cdot 10^3}} = 0,762\text{V}$$

Si calcolano le cadute di tensione ai capi delle resistenze applicando la legge di Ohm generalizzata ai tronchi ai capi di ogni ramo; quindi, applicando la legge di Ohm ai capi di ogni resistenza, si calcolano le correnti:

$$V_{AB} = E_1 - V_1 \Rightarrow V_1 = E_1 - V_{AB} = 12 - 0,762 = 11,238\text{V} \Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{11,238}{2,7 \cdot 10^3} = 4,16\text{mA}$$

$$V_{AB} = E_2 + V_2 \Rightarrow V_2 = V_{AB} + E_2 = 0,762 + 12 = 12,762\text{V} \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{12,762}{1,5 \cdot 10^3} = 8,51\text{mA}$$

$$V_{AB} = E_3 - V_3 \Rightarrow V_3 = E_3 - V_{AB} = 12 - 0,762 = 11,238\text{V} \Rightarrow I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{11,238}{2,2 \cdot 10^3} = 5,1\text{mA}$$

$$V_{AB} = V_4 = 0,762 \Rightarrow I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{0,762}{1 \cdot 10^3} = 0,762\text{mA}$$

I valori ottenuti coincidono con quelli precedentemente calcolati.

Sigle e valori dei componenti

$$E_1 = E_2 = E_3 = 12\text{V} ; R_1 = 2,7\text{k}\Omega ; R_2 = 1,5\text{k}\Omega ; R_3 = 2,2\text{k}\Omega ; R_4 = 1\text{k}\Omega$$

Apparecchiature e strumentazione

Due alimentatori stabilizzati a 12V ; utilizzati come alimentatore duale; un multimetro digitale 4½ digit.

Procedimento della verifica

1. Si misurano le resistenze.
2. Si monta il circuito utilizzando per E_1 ed E_3 lo stesso alimentatore, per E_2 il duale.
3. Si misura la differenza di potenziale V_{AB} e le differenze di potenziale ai capi dei generatori e delle resistenze.

4. Utilizzando i valori delle tensioni misurate si calcolano, applicando la legge di Ohm ai capi di ogni resistenza, le correnti: $I_1 = \frac{V_1}{R_1}$; $I_2 = \frac{V_2}{R_2}$; $I_3 = \frac{V_3}{R_3}$; $I_4 = \frac{V_4}{R_4}$.
5. Si tabulano i valori misurati e quelli calcolati, per una migliore e più immediata interpretazione dei dati.

Tabulazione dei dati

	kΩ				Volt								mA			
	R1	R2	R3	R4	E1	E2	E3	V1	V2	V3	V4	I1	I2	I3	I4	
Valori calcolati	2,7	1,5	2,2	1	12	-12	12	11,24	-12,76	11,24	0,76	4,16	8,51	5,1	0,76	
Valori sperimentali	2,73	1,5	2,24	0,99	11,9	-11,92	11,9	11,22	-12,6	11,22	0,68	4,12	8,43	5,01	0,69	

Conclusioni

I valori sperimentali sono in ottimo accordo con quelli calcolati.