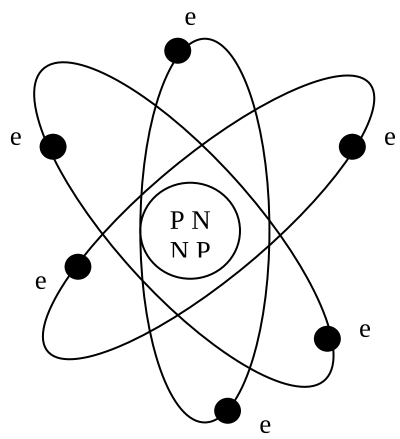
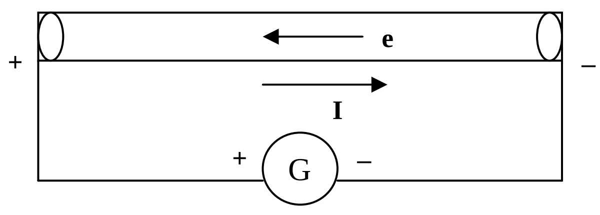
1. – CORRENTE CONTINUA

1.1. – Carica elettrica e corrente elettrica



Carica elementare = carica dell'elettrone = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C
Massa dell'elettrone = m = $9{,}31 \cdot 10^{-31}$Kg
L'atomo è neutro.
Le cariche che possono essere spostate nei solidi sono gli elettroni. Se un atomo perde un elettrone diventa uno ione positivo; se acquista un elettrone diventa uno ione negativo.
Tutti gli atomi tendono ad assumere l'ottetto completo, ossia ad avere otto elettroni sull'orbita più esterna.
Se sull'orbita più esterna vi sono da 1 a 3 elettroni, ha la tendenza a perdere elettroni, ossia ha bassa energia di estrazione e alta energia di cattura. Tali elementi sono detti **conduttori metallici**; a temperatura ambiente il metallo ha energia sufficiente a svincolare un elettrone dall'orbita più esternategli atomi, elettroni che sono liberi di muoversi all'interno del conduttore: permettono la conduzione della corrente.
Se sull'orbita più esterna vi sono quattro elettroni, la tendenza a perdere o acquisire elettroni è uguale. Tali elementi vengono detti **semiconduttori**.
Se sull'orbita più esterna vi sono da 5 a 7 elettroni l'atomo ha la tendenza ad acquistare elettroni, ossia ha bassa energia di cattura e alta energia di estrazione. Tali elementi sono detti **isolanti**; non vi sono al loro interno cariche libere; pertanto, non permettono la conduzione della corrente elettrica.
Se ad un conduttore si applica una differenza di potenziale, tramite un generatore elettrico, gli elettroni fluiranno dal potenziale più alto a quello più basso, producendo un flusso continuo di cariche attraverso il conduttore, detto corrente elettrica.

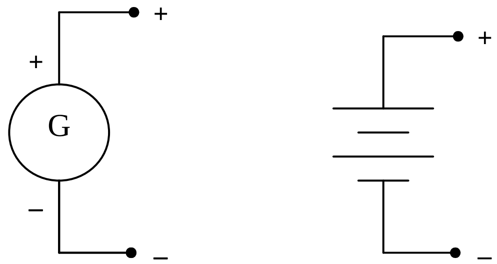


Si definisce corrente elettrica la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore nell'unità di tempo e viene misurata in Ampère (A), in formula:

$$I = \frac{Q}{t} \quad ; \quad \frac{\text{Coulomb}}{\text{secondo}} = \text{Ampère} \quad ; \quad \frac{C}{s} = A$$

1.2. – Generatore elettrico. Utilizzatore. Circuito elementare

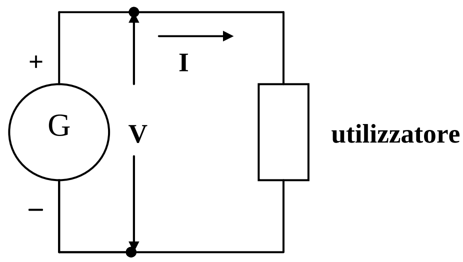
Si definisce **generatore elettrico** un dispositivo in grado di mantenere ai suoi estremi una differenza di potenziale ed erogare corrente.



La differenza di potenziale viene prodotta spostando gli elettroni da un morsetto all'altro. In breve, ad un morsetto si ha un accumulo di cariche positive (potenziale positivo) e all'altro un accumulo di cariche negative (potenziale negativo): agli estremi del generatore si avrà una differenza di potenziale e lo spostamento di carica termina allorché il valore della differenza di potenziale ha raggiunto il valore nominale del generatore (il valore massimo possibile).
Per produrre lo spostamento di carica tra i morsetti è necessario compiere un lavoro pari a

$$L = Q \cdot V$$

dove Q è la quantità di carica spostata sotto la differenza di potenziale V.
Per **utilizzatore** si intende un qualunque dispositivo in grado di trasformare energia elettrica in altra forma di energia (resistenza, forno elettrico, radio, televisione, lampadina, ecc.).
Se si collega un utilizzatore ad un generatore, sotto l'azione della differenza di potenziale, le cariche fluiranno da un morsetto all'altro attraverso l'utilizzatore, che trasforma l'energia Q·V in altra forma (calore, luce, suono, immagini, ecc.).



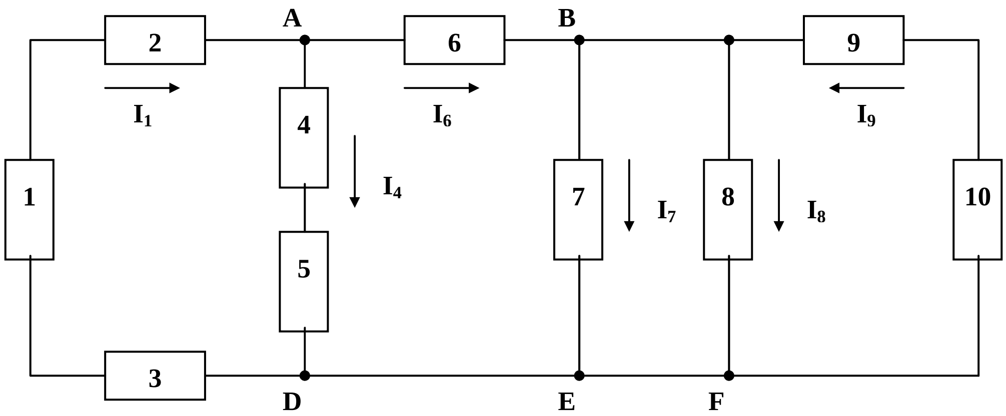
Il generatore, a sua volta, compie un lavoro sulle cariche che hanno attraversato l'utilizzatore trasportandole, al suo interno, da un morsetto all'altro. Il generatore, pertanto, fornisce energia; l'utilizzatore assorbe energia.
La potenza è l'energia erogata (generatore) o assorbita (utilizzatore) nell'unità di tempo:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{Q \cdot V}{t} = V \cdot I$$

La potenza, in qualunque caso, si calcola come prodotto di V ed I (tensione per corrente) e si misura in Watt (W).
Il circuito appena visto viene detto **circuito elementare**.

1.3. – Definizioni sui circuiti. I° principio di Kirchhoff. Bipoli in serie e in parallelo

Si definisce **bipolo** un elemento circuitale a due terminali.
Un bipolo può essere **attivo** o **passivo**. Un bipolo si definisce attivo se è in grado di erogare potenza, ossia energia (generatore). Un bipolo si definisce passivo se assorbe energia (resistenza, condensatore, induttanza).
Collegando più bipoli assieme si ottiene un circuito elettrico.



- **Nodo**: si definisce nodo un punto del circuito in cui convergono tre o più elementi circuitali. Nel circuito di figura ci sono 3 nodi: A; B e C; D e E e F. I punti B, C e i punti D, E, F sono tra loro direttamente collegati, ossia sono indistinguibili e costituiscono un unico e solo nodo. Di particolare interesse è il numero dei nodi indipendenti. Se n è il numero dei nodi, il numero dei nodi indipendenti e (n – 1). Nel circuito di figura vi sono 2 nodi indipendenti.

- **Ramo**: si definisce ramo un tratto di circuito che unisce due nodi. Nel circuito di figura vi sono 6 rami: $\mathbf{r_1}$ ramo AD (1,2,3); $\mathbf{r_2}$ ramo AD (4, 5); $\mathbf{r_3}$ ramo AB (6); $\mathbf{r_4}$ ramo BE (7); $\mathbf{r_5}$ ramo CF (8); $\mathbf{r_6}$ ramo CF (9, 10). Il numero delle correnti in un circuito e uguale al numero dei rami.

- **Maglia**: si definisce maglia un tratto di circuito che parte da un nodo e si chiude sullo stesso nodo. Ad esempio AA (1, 2, 3, 4, 5); AA (4, 5, 6, 7); AA (1, 2, 3, 6, 9, 10); BB (7, 8); BB (7, 9, 10); BB (6, 2, 1, 3, 7,); ecc.. Quello che interessa conoscere è il numero delle maglie indipendenti, che si calcola come $m = r - (n - 1)$, dove m = numero dei rami; n–1 = numero dei nodi indipendenti.

In ogni ramo vi può essere una ed una sola corrente, tante cariche entrano da un estremo, altrettante cariche escono dall'altro estremo.

I° principio di Kirchhoff

In un nodo, la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti:

$$\sum I_e = \sum I_u$$

Altra dicitura: in un nodo, la somma algebrica delle correnti è uguale a zero:

$$\sum I = 0$$

Si parla di somma algebrica quando le quantità da sommare hanno il segno. Convenzionalmente si prendono positive le correnti entranti, negative quelle uscenti.

Ad esempio, nel circuito di figura si ha:

nodo A: $I_1 = I_4 + I_6$ oppure $I_1 - I_4 - I_6 = 0$

nodo B,C: $I_6 + I_9 = I_7 + I_8$ oppure $I_6 + I_9 - I_7 - I_8 = 0$

nodo D, E, F: $I_4 + I_7 + I_8 = I_1$ oppure $I_4 + I_7 + I_8 - I_1 = 0$

Bipoli in serie: due o più bipoli si dicono in serie se stanno sullo stesso ramo.

Bipoli in parallelo: due o più bipoli si dicono in parallelo se sono collegati agli stessi due nodi.

Rami in parallelo: due o più rami sono in parallelo se sono collegati agli stessi due nodi.

Ad esempio, nel circuito di figura

Sono in serie i bipoli 1, 2, 3; 4, 5; 9, 10.

Sono in parallelo i bipoli 7, 8.

Sono in parallelo i rami (1, 2, 3) e (4, 5); 7 e 8 e (9, 10).

I bipoli 6 e 7; 8 e 10; 8 e 9 non sono né in serie né in parallelo.

Bipoli in serie, poiché stanno sullo stesso ramo, sono attraversati dalla stessa corrente.

Bipoli in parallelo, poiché sono collegati agli stessi nodi, hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale.

1.4. – Legge di Ohm e resistenza

La **legge di Ohm** lega, matematicamente, la differenza di potenziale tra due punti, la corrente che entra da uno dei punti ed esce dall’altro e la resistenza che c’è complessivamente tra i due punti. In formula:

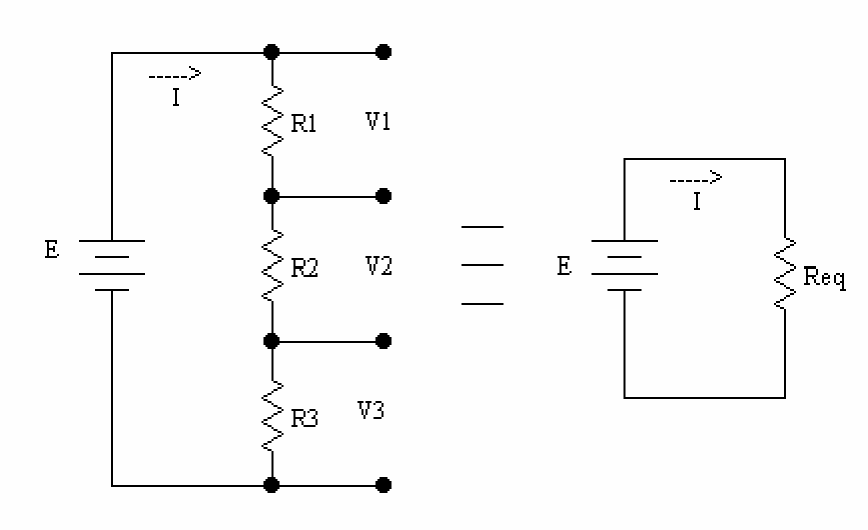
$$V = R \cdot I$$

Tale legge, note due delle grandezze, consente di calcolare la terza in funzione delle altre due.

Il valore di **resistenza** dà la misura dell'opposizione del bipolo al passaggio della corrente; un piccolo valore implica scarsa opposizione al passaggio della corrente, un alto valore grande opposizione al passaggio della corrente. L'unità di misura della resistenza è l'**Ω** (ohm).

1.4.1. – Resistenze in serie

Due o più resistenze sono in serie se stanno sullo stesso ramo.



Poiché in ogni ramo può circolare una sola corrente, le resistenze in serie sono attraversate dalla stessa corrente I.
La differenza di potenziale ai capi di ogni resistenza si calcola applicando la legge di Ohm ad ogni resistenza:

$$V_1 = R_1 \cdot I \quad ; \quad V_2 = R_2 \cdot I \quad ; \quad V_3 = R_3 \cdot I \quad ; \quad E = V_1 + V_2 + V_3$$

Proprietà delle resistenze in serie

- Resistenze in serie sono attraversate dalla stessa corrente;

- Resistenze in serie si ripartiscono la tensione applicata in modo direttamente proporzionale al valore di resistenza.

Se si applica la legge di Ohm ai capi della serie, si ha: $E = R_{eq} \cdot I$

l'intera serie equivale, vista dal generatore, ad una sola resistenza detta **resistenza equivalente**.
Per esplicitare il legame esistente tra R_{eq}, R_1, R_2, R_3 si utilizza l'equazione $E = V_1 + V_2 + V_3$ in cui al posto delle tensioni V_1, V_2, V_3 si sostituisce il loro equivalente secondo la legge di Ohm:

$$E = V_1 + V_2 + V_3 \quad \Rightarrow \quad R_{eq} \cdot I = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

La resistenza equivalente di due o più resistenze in serie è uguale alla somma delle resistenze.

Esempio $E = 10V$; $R_1 = 2K\Omega$; $R_2 = 5K\Omega$; $R_3 = 3K\Omega$

Risolvere un circuito significa calcolare tutte le differenze di potenziale e tutte le correnti.
Per risolvere il circuito si deve utilizzare la legge di Ohm. Gli unici due punti del circuito dei quali possiamo conoscere due delle grandezze tra V, R, I sono gli estremi della serie: è nota la differenza di potenziale E e si può calcolare la resistenza complessiva tra tali punti.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^3 + 3\cdot 10^3 = 10\cdot 10^3\Omega = 10K\Omega$$

Si può, quindi, calcolare la corrente I che entra da un estremo della serie ed esce dall'altro:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{10}{10\cdot 10^3} = 1\cdot 10^{-3}A = 1mA$$

È ora possibile calcolare le differenze di potenziale $V_1,\ V_2,\ V_3$:

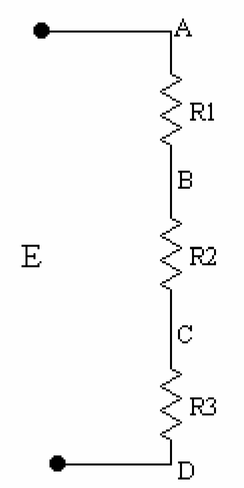
$$V_1 = R_1 \cdot I = 2\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^{-3} = 2V \qquad V_2 = R_2 \cdot I = 5\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^{-3} = 5V$$

$$V_3 = R_3 \cdot I = 3\cdot 10^3 \cdot 1\cdot 10^{-3} = 3V \qquad E = V_1 + V_2 + V_3 = 2 + 5 + 3 = 10V$$

Il rapporto $\dfrac{E}{R_1 + R_2 + R_3} \rightarrow \dfrac{V}{\Omega}$ può essere riguardato non solo come corrente, ma come numero di volt che vanno a cadere su ogni ohm di resistenza, ossia come un **rapporto di partizione** tra i volt applicati alla serie e il valore dell'intera serie.
Nel caso dell'esempio, si ha:

$$\frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10}{2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^3 + 3\cdot 10^3} = 1\cdot 10^{-3}\,\frac{V}{\Omega}$$

Su ogni ohm di resistenza si ripartirà $1\cdot 10^{-3}V$ di tensione. Noto il rapporto di partizione, per calcolare le differenze di potenziale sulle resistenze della serie è sufficiente moltiplicare il valore del rapporto di partizione per il valore di resistenza che vi è tra i punti di cui si vuole conoscere la differenza di potenziale.



$$V_{AB} = V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} E \qquad V_{AC} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} E$$

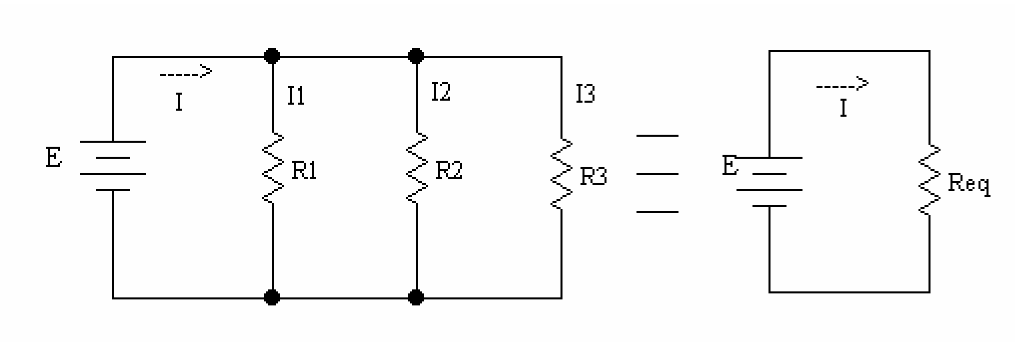
$$V_{BC} = V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} E \qquad V_{BD} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E$$

$$V_{CD} = V_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E \qquad V_{AB} + V_{CD} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E$$

La regola di partizione consente di calcolare le differenze di potenziale in una serie direttamente senza dovere calcolare preventivamente la corrente.

1.4.2. – Resistenze in parallelo

Due o più resistenze si dicono in parallelo quando sono collegate agli stessi due nodi.



La corrente I entrante nella serie si ripartisce nelle tre resistenze nelle correnti I_1, I_2, I_3 e, per il I° principio di Kirchhoff, si ha:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Poiché le resistenze sono collegate agli stessi punti, ai loro estremi vi è la stessa differenza di potenziale E. applicando la legge di Ohm ai loro estremi, si calcolano le tre correnti:

$$I_1 = \frac{E}{R_1} \quad ; \quad I_2 = \frac{E}{R_2} V_2 \quad ; \quad I_3 = \frac{E}{R_3}$$

Proprietà delle resistenze in parallelo

- Resistenze in parallelo hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale;

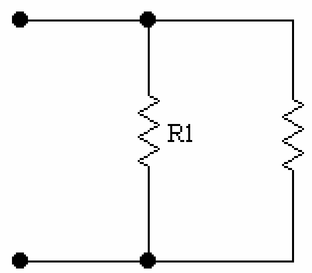
- Resistenze in parallelo si ripartiscono la corrente entrante nel parallelo in modo inversamente proporzionale al valore di resistenza.

Se si applica la legge di Ohm ai capi dell’intero parallelo, si ha: $I = \frac{E}{R_{eq}}$

L'intero parallelo equivale ad una sola resistenza detta **resistenza equivalente**.
Per esplicitare il legame tra R_{eq}, R_1, R_2, R_3 si utilizza l'equazione $I = I_1 + I_2 + I_3$ in cui al posto delle correnti si sostituisce il loro equivalente secondo la legge di Ohm:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

La resistenza equivalente di due o più resistenze in parallelo è uguale all'inverso della somma degli inversi le resistenze.
Nel caso in cui le resistenze in parallelo sono solo due, si può usare, per calcolare la resistenza equivalente, una formula più comoda:



$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di N resistenze uguali in parallelo, si ha:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + ... + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{N}{R}} = \frac{R}{N}$$

Esempio $E = 12V$; $R_1 = 2K\Omega$; $R_2 = 3K\Omega$; $R_3 = 4K\Omega$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{3\cdot 10^3} + \frac{1}{4\cdot 10^3}} = \frac{10^3}{\frac{6+4+3}{12}} = \frac{12}{13}\cdot 10^3 = \frac{12}{13} K\Omega \cong 0,92 K\Omega$$

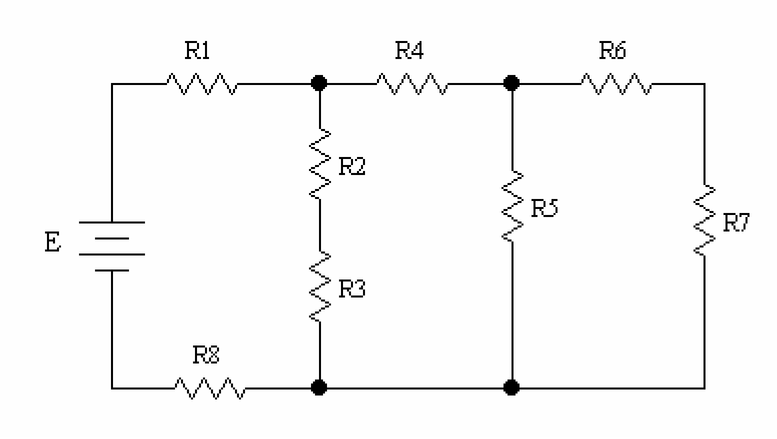
$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{12}{\frac{12}{13}\cdot 10^3} = 13\cdot 10^{-3} A = 13mA \qquad I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{2\cdot 10^3} = 6\cdot 10^{-3} A = 6mA$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{12}{3\cdot 10^3} = 4\cdot 10^{-3} A = 4mA \qquad I_3 = \frac{E}{R_3} = \frac{12}{4\cdot 10^3} = 3\cdot 10^{-3} A = 3mA$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 6\cdot 10^{-3} + 4\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-3} = 13\cdot 10^{-3} A = 13mA$$

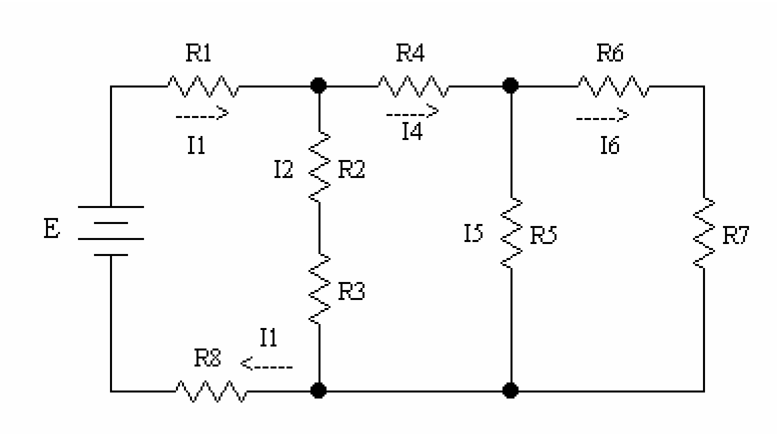
1.5. – Risoluzione di circuiti resistivi con un solo generatore

Risolvere un circuito significa calcolare tutte le tensioni e le correnti del circuito.
Dato il circuito di figura, si eseguono i n successione i seguenti punti:



$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

1. Si segnano le correnti e si nota che gli unici due punti tra i quali si può applicare la legge di Ohm sono quelli agli estremi del generatore, dei quali conosciamo il valore della tensione E e possiamo calcolare il valore della resistenza equivalente.



2. si disegnano i circuiti ridotti, calcolando, di volta in volta, la resistenza equivalente delle resistenze che sono in serie o in parallelo, sostituendola alla serie o al parallelo nel circuito ridotto.

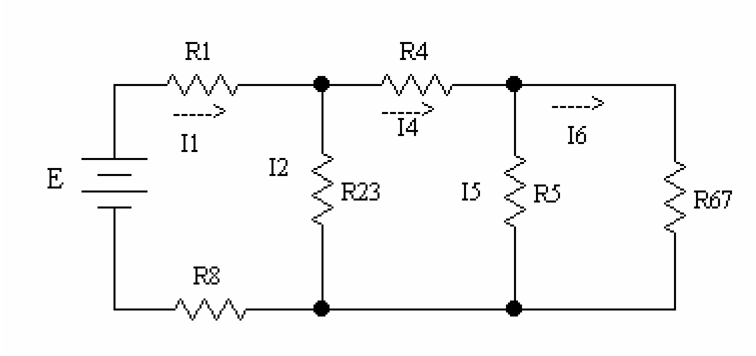
a. **Primo circuito ridotto**

R_2 e R_3 sono in serie $\quad R_{23} = R_2 + R_3 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 = 6K\Omega$

R_6 e R_7 sono in serie $\quad R_{67} = R_6 + R_7 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 6K\Omega$

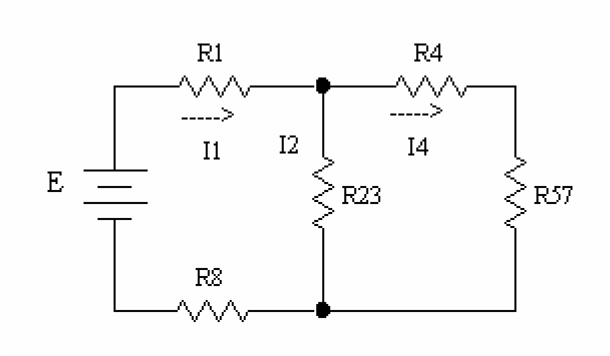
Si disegna il circuito ridotto e le correnti. Al posto delle serie R_2-R_3 e R_6-R_7 si sostituiscono, rispettivamente, le resistenze R_{23} e R_{67}.

R$_{47}$.



b. **Secondo circuito ridotto**

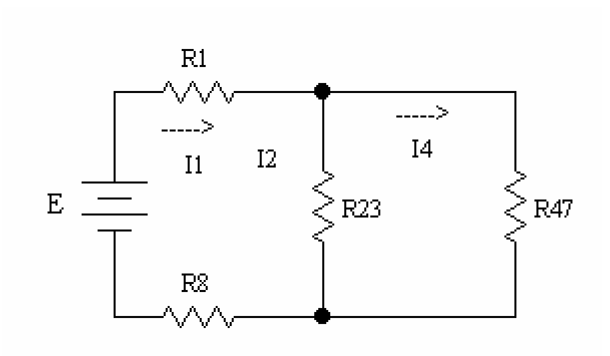
R_5 e R_{67} sono in parallelo $\quad R_{57} = \dfrac{R_5 \cdot R_{67}}{R_5 + R_{67}} = \dfrac{4 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 2{,}4K\Omega$



Si disegna il circuito ridotto e le correnti. Al posto del parallelo $R_5 - R_{67}$ si sostituisce la resistenza R_{57}.

c. **Terzo circuito ridotto**

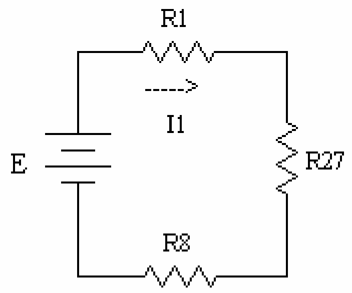
R_4 e R_{57} sono in serie $\quad R_{47} = R_4 + R_{57} = 2 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^3 = 4{,}4K\Omega$



Si disegna il circuito ridotto e le correnti. Al posto della serie $R_4 - R_{57}$ si sostituisce la resistenza R_{47}.

d. **Quarto circuito ridotto**

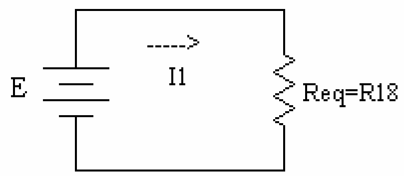
R_{23} e R_{47} sono in parallelo $\quad R_{27} = \dfrac{R_{23} \cdot R_{47}}{R_{23} + R_{47}} = \dfrac{6 \cdot 10^3 \cdot 4{,}4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 + 4{,}4 \cdot 10^3} = 2{,}54 K\Omega$



Si disegna il circuito ridotto e le correnti. Al posto del parallelo R_{23}-R_{47} si sostituisce la resistenza R_{27}.

e. **Quinto circuito ridotto**

R_1, R_{27} e R_8 sono in serie $\quad R_{eq} = R_{18} = R_1 + R_{27} + R_8 = 2 \cdot 10^3 + 2{,}54 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 = 8{,}54 K\Omega$



Si disegna il circuito ridotto e le correnti. Al posto della serie R_1-R_{27}-R_8 si sostituisce la resistenza $R_{eq} = R_{18}$.

f. **Si inizia dall'ultimo circuito ridotto**: di tale circuito si calcolano tutte le correnti e le tensioni incognite. Si passa, poi, al precedente e, di nuovo, si calcolano le correnti e le tensioni incognite. Si passa al precedente e si ripete fino ad arrivare al circuito originario

g. **Circuito ridotto 5**: È incognita la corrente I_1:

$$I_1 = \frac{E}{R_{18}} = \frac{12}{2{,}54 \cdot 10^3} = 1{,}405 mA$$

h. **Circuito ridotto 4**: Sono incognite le tensioni V_1, $V_{27} = V_{23} = V_{47}$, V_8:

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}405 \cdot 10^{-3} = 2{,}81 V \qquad V_8 = R_8 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}405 \cdot 10^{-3} = 5{,}62 V$$

$$V_{27} = V_{23} = V_{47} = R_{27} \cdot I_1 = 2{,}54 \cdot 10^3 \cdot 1{,}405 \cdot 10^{-3} = 3{,}57 V$$

i. **Circuito ridotto 3**: Sono incognite le correnti I_2 e I_4:

$$I_2 = \frac{V_{23}}{R_{23}} = \frac{3{,}57}{6 \cdot 10^3} = 0{,}595mA \qquad I_4 = \frac{V_{47}}{R_{47}} = \frac{3{,}57}{4{,}4 \cdot 10^3} = 0{,}81mA$$

j. **Circuito ridotto 2**: Sono incognite le tensioni V_4 e $V_{57} = V_5 = V_{67}$:

$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 1{,}62V$$

$$V_{57} = V_5 = V_{67} = R_{57} \cdot I_4 = 2{,}4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 1{,}944V$$

k. **Circuito ridotto 1**: Sono incognite le correnti I_5 e I_6:

$$I_5 = \frac{V_5}{R_5} = \frac{1{,}944}{4 \cdot 10^3} = 0{,}486mA \qquad I_6 = \frac{V_{67}}{R_{67}} = \frac{1{,}9443{,}57}{6 \cdot 10^3} = 0{,}324mA$$

l. **Circuito originale**: Sono incognite le tensioni V_2. V_3:, V_6 e V_7:

$$V_2 = R_2 \cdot I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}595 \cdot 10^{-3} = 2{,}38V \qquad V_3 = R_3 \cdot I_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}595 \cdot 10^{-3} = 1{,}19V$$

$$V_6 = R_6 \cdot I_6 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}324 \cdot 10^{-3} = 0{,}648V \qquad V_7 = R_7 \cdot I_6 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}324 \cdot 10^{-3} = 1{,}296V$$

m. **Riassumendo**

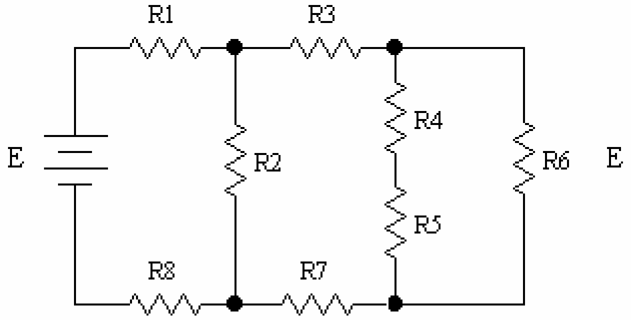
$I_1 = 1{,}405mA$; $I_2 = 0{,}595mA$; $I_4 = 0{,}81mA$; $I_5 = 0{,}486mA$; $I_6 = 0{,}324mA$; $V_1 = 2{,}81V$

$V_2 = 2{,}38V$; $V_3 = 1{,}19V$; $V_4 = 1{,}62V$; $V_5 = 1{,}944V$; $V_6 = 0{,}648V$; $V_7 = 1{,}296V$; $V_8 = 5{,}62V$

Il circuito è risolto: sono note tutte le tensioni e le correnti.

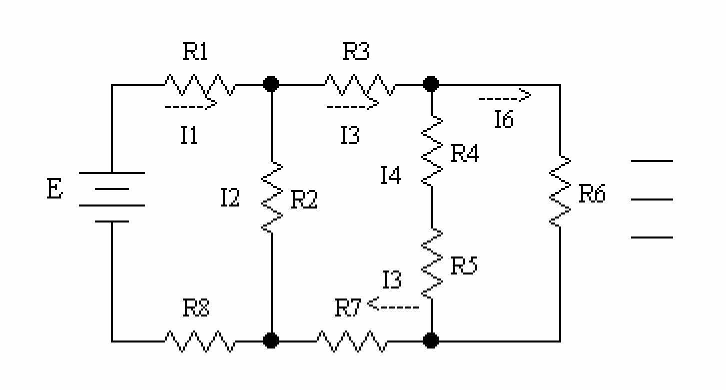
1.6. – Risolvere i seguenti circuiti resistivi con un generatore

1.6.1. – Esercizio quasi svolto

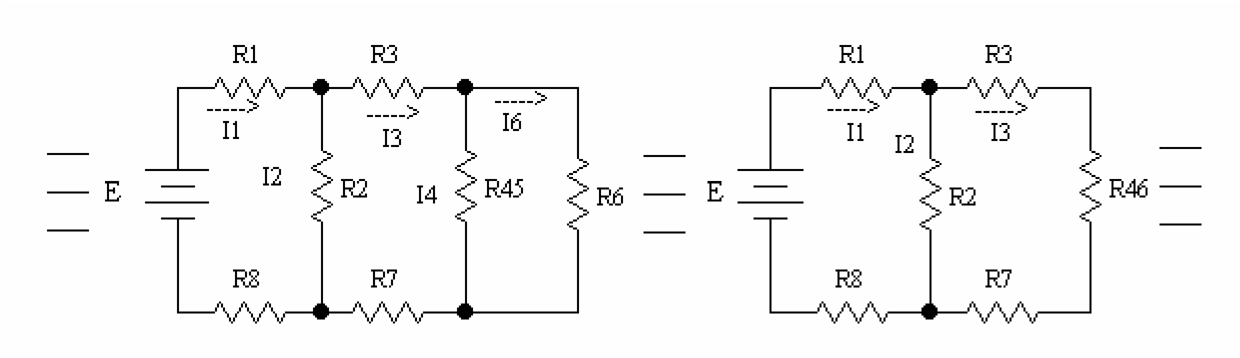


$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

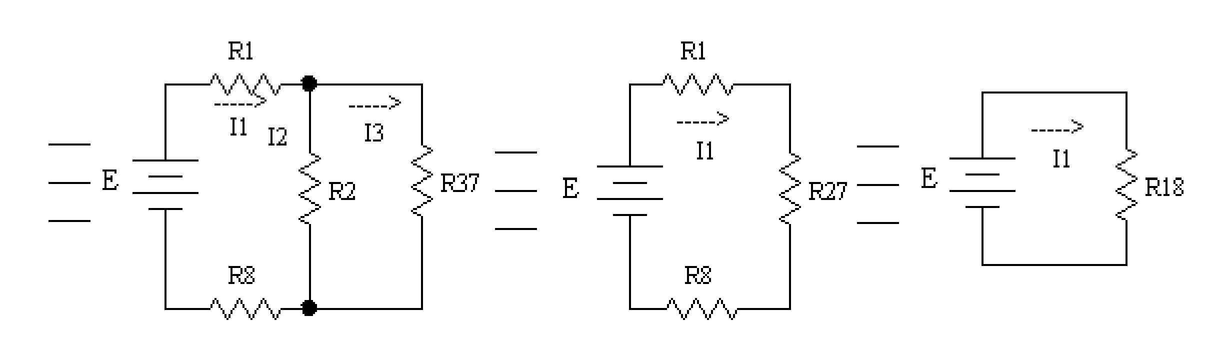
- Si segnano le correnti



- Si disegnano i circuiti equivalenti



Circuito ridotto 1 Circuito ridotto 2



Circuito ridotto 3 Circuito ridotto 4 Circuito ridotto 5

- Calcolo delle resistenze equivalenti

$$R_{45} = R_5 + R_5 \quad ; \quad R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_6} \quad ; \quad R_{37} = R_3 + R_{46} + R_7 \quad ; \quad R_{27} = \frac{R_2 \cdot R_{37}}{R_2 + R_{37}}$$

$$R_{eq} = R_{18} = R_1 + R_{27} + R_8$$

- Circuito ridotto 5 $\qquad I_1 = \dfrac{E}{R_{18}}$

- Circuito ridotto 4 $\qquad V_1 = R_1 \cdot I_1 \quad ; \quad V_{27} = V_2 = V_{37} = R_{27} \cdot I_1 \quad ; \quad V_8 = R_8 \cdot I_1$

- Circuito ridotto 3 $\quad I_2 = \dfrac{V_2}{R_2} \quad ; \quad I_3 = \dfrac{V_{37}}{R_{37}}$

- Circuito ridotto 2 $\quad V_3 = R_3 \cdot I_3 \quad ; \quad V_{46} = V_{45} = V_6 = R_{46} \cdot I_3 \quad ; \quad V_7 = R_7 \cdot I_3$

- Circuito ridotto 1 $\quad I_4 = \dfrac{V_{45}}{R_{45}} \quad ; \quad I_6 = \dfrac{V_6}{R_6}$

- Circuito iniziale $\quad V_4 = R_4 \cdot I_4 \quad ; \quad V_5 = R_5 \cdot I_4$

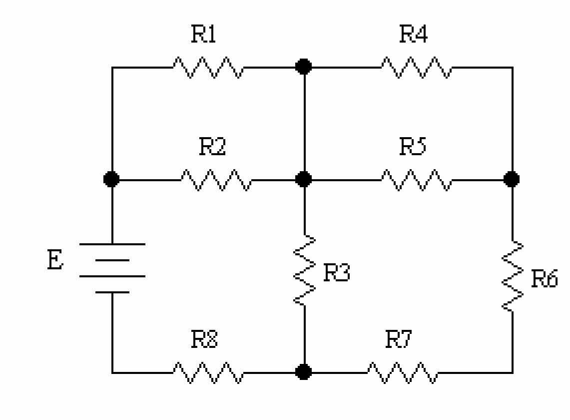
Risposte

$$R_{18} = 8{,}6K\Omega \;;\; I_1 = 1{,}395mA \;;\; I_2 = 0{,}908mA \;;\; I_3 = 0{,}4841mA \;;\; I_4 = 0{,}121mA$$

$$I_6 = 0{,}363mA \;;\; V_1 = 2{,}79V \;;\; V_2 = 3{,}63V \;;\; V_3 = 0{,}968V \;;\; V_4 = 0{,}242V \;;\; V_5 = 0{,}0{,}484V$$

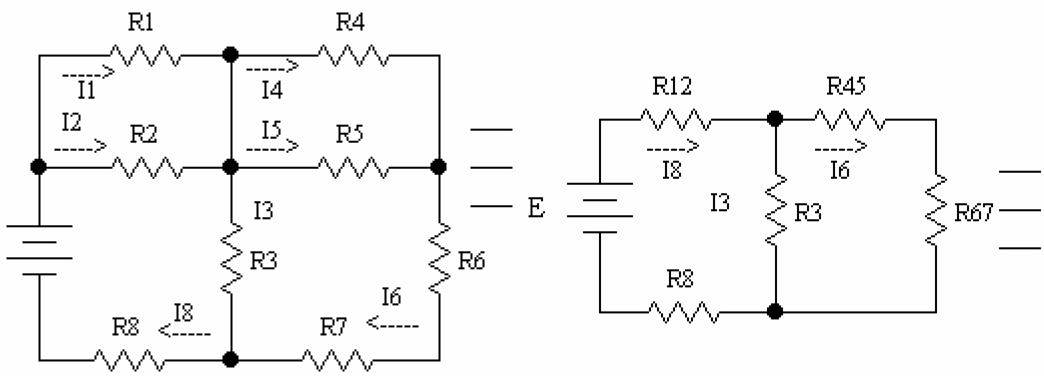
$$V_6 = 0{,}726V \;;\; V_7 = 1{,}936V \;;\; V_8 = 5{,}58V$$

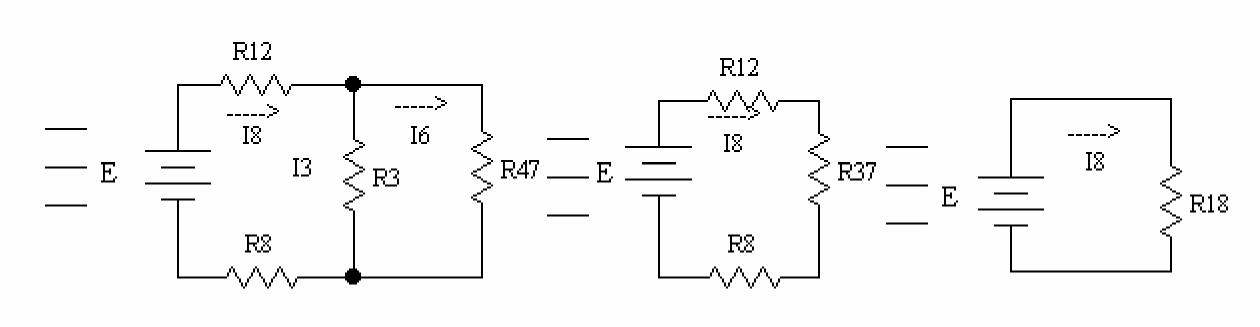
1.6.2. – Esercizio facilitato



$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

- Circuiti equivalenti





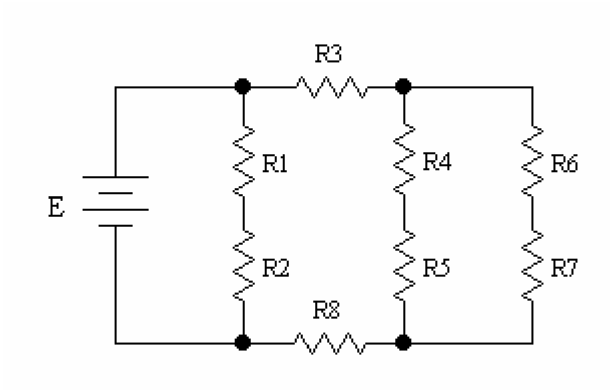
Risposte

$$R_{18} = 6{,}9K\Omega \;;\; I_1 = 1{,}16mA \;;\; I_2 = 0{,}58mA \;;\; I_3 = 1{,}365mA \;;\; I_4 = 0{,}248mA \;;\; I_5 = 0{,}124mA$$

$$I_6 = 0{,}372mA \;;\; I_8 = 1{,}379mA \;;\; V_1 = V_2 = 2{,}32V \;;\; V_3 = 2{,}73V \;;\; V_4 = V_5 = 0{,}496V$$

$$V_6 = 0{,}744V \;;\; V_7 = 1{,}488V \;;\; V_8 = 6{,}95V$$

1.6.3. – Esercizio



$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

Risposte

$$R_{18} = 3{,}6K\Omega \;;\; I_1 = 2mA \;;\; I_3 = 1{,}33mA \;;\; I_4 = 0{,}67mA \;;\; I_6 = 0{,}67mA \;;\; V_1 = 4V \;;\; V_2 = 8V$$

$$V_3 = 2{,}57V \;;\; V_4 = 1{,}34V \;;\; V_5 = 2{,}68V \;;\; V_6 = 1{,}34V \;;\; V_7 = 2{,}68V \;;\; V_8 = 5{,}33V$$

1.7. – Corto circuito e circuito aperto

Si consideri il circuito di figura.

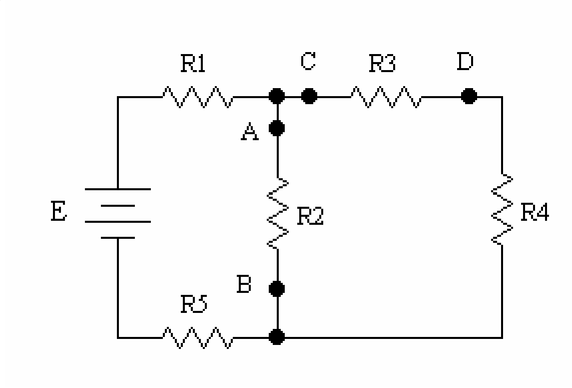
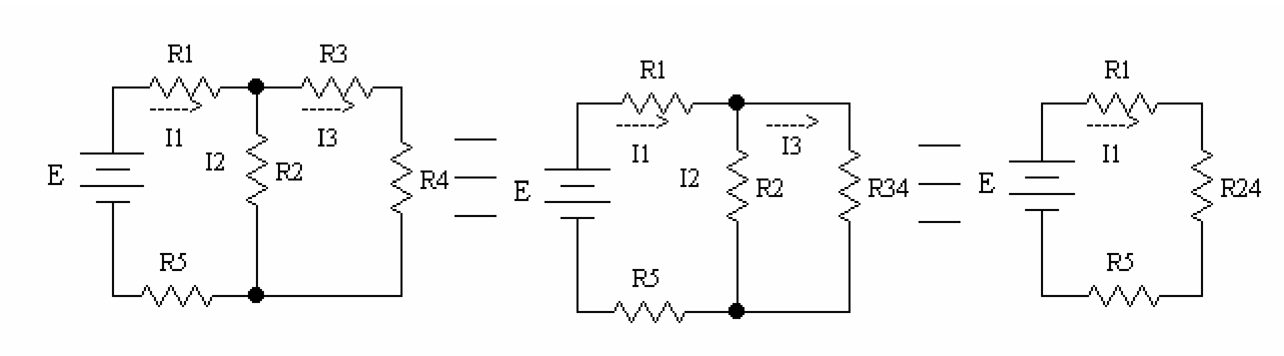


Figura 1

$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_4 = R_6 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = 4K\Omega$$

Risoluzione del circuito



$$R_{34} = R_3 + R_4 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 = 6K\Omega \quad ; \quad R_{24} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 1{,}5K\Omega$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{24} + R_5} = \frac{12}{2 \cdot 10^3 + 1{,}5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}6mA$$

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 3{,}2V \quad ; \quad V_{24} = V_2 = V_{34} = R_{24} \cdot I_1 = 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 2{,}4V$$

$$V_5 = R_5 \cdot I_1 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} = 6{,}4V \quad ; \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{2{,}4}{2 \cdot 10^3} = 1{,}2mA$$

$$I_3 = \frac{V_{34}}{R_{34}} = \frac{2{,}4}{6 \cdot 10^3} = 0{,}4mA \quad ; \quad V_3 = R_3 \cdot I_3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 1{,}6V$$

$$V_4 = R_4 \cdot I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}8V$$

Se viene modificata la disposizione delle resistenze o il valore anche di una sola resistenza, cambiano i valori delle tensioni e delle correnti.

Corto circuito

Se nel circuito di Figura 1 diminuiamo il valore della resistenza R_2 aumenta la corrente I_2 e diminuisce la tensione V_2. Si può diminuire il valore della resistenza R_2 fino a raggiungere il valore zero; in tale caso, i punti A e B risulteranno direttamente collegati tra loro, ossia tra i due punti di ha un **corto circuito**.
Il circuito di fig. 1 si trasforma nel seguente.

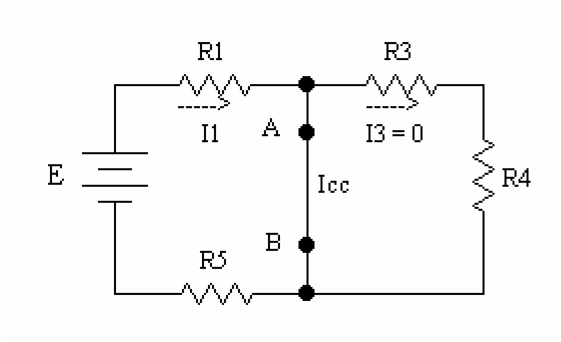


Figura 2

La corrente I_{CC} (corrente di corto circuito) che circola tra i punti A e B è il massimo valore di corrente ottenibile tra tali punti; la differenza di potenziale tra i punti A e B è uguale a zero, essendo i due punti direttamente collegati tra loro (la legge di Ohm applicata tra tali punti dà $V_{AB} = 0 \cdot I_{CC} = 0$). Risulta uguale a zero anche la differenza di potenziale di tutti i rami del circuito direttamente collegati ai punti A e B, ossia in parallelo a tali punti; pertanto, per la legge di Ohm, sarà nulla, in tali rami, anche la corrente. Se in un ramo è nulla sia la corrente sia la tensione, tale ramo diventa ininfluente per il circuito e può essere considerato elettricamente scollegato (ossia come se non fosse presente nel circuito).

Si dice che tra due punti di un circuito vi è un <u>corto circuito</u> quando i due punti sono direttamente collegati tra loro.

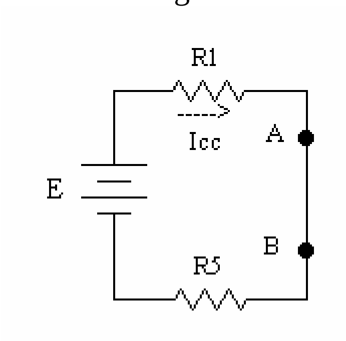
Le caratteristiche di un corto circuito sono:

a. Corrente massima: I_{CC}

b. Tensione nulla: $V_{AB} = 0$

c. Tutti i rami in parallelo al corto circuito risultano elettricamente scollegati (ossia come se non ci fossero)

Tenendo presenti queste proprietà, il circuito di Figura 2 si riduce al seguente:



$$I_{CC} = \frac{E}{R_1 + R_5} = \frac{12}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 2mA$$

$I_{CC} = 2mA$ è il massimo valore di corrente ottenibile tra i punti A e B. Confrontare col valore I_2 del circuito di fig. 1 ($I_2 = 1{,}2mA$).

Circuito aperto

Se, nel circuito di fig. 1, si fa aumentare il valore della resistenza R_3, diminuisce il valore della corrente I_3 e aumenta il valore della tensione V_3. Si può aumentare il valore della resistenza R_3 fino a valori infinitamente grandi, per i quali la corrente risulterà infinitamente piccola, ossia uguale a zero. Tale condizione equivale a togliere la resistenza R_3 dal circuito lasciando i punti C e D scollegati.
Se due punti di un circuito, che stanno sullo stesso ramo, sono tra loro scollegati, si dice che tra tali punti si ha un **circuito aperto**.
Il circuito di fig. 1 si trasforma nel seguente:

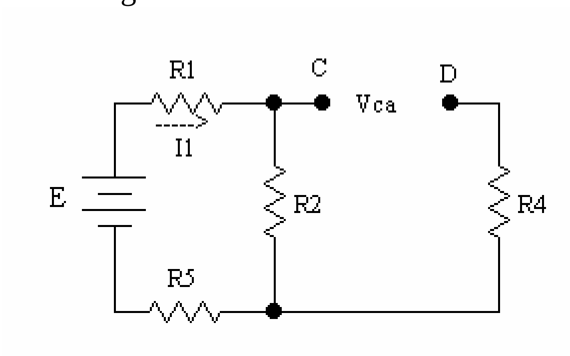


Figura 2

In un circuito aperto non può circolare corrente; di conseguenza, nella resistenza R_4 si ha corrente nulla e (per la legge di Ohm $V_4 = R_4 \cdot I_4 = R_4 \cdot 0 = 0$) tensione nulla. In tali condizioni, la resistenza R_4 risulta elettricamente scollegata (ossia come se non fosse presente nel circuito).
Osservando la fig. 3, il punto C è equipotenziale all'estremo superiore della resistenza R_2; il punto D, essendo nulla la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_4, è equipotenziale all'estremo inferiore della resistenza R_2. La differenza di potenziale V_{ca} tra i punti C e D coincide, pertanto, con la differenza di potenziale che si ha agli estremi della resistenza R_2 ed è la massima differenza di potenziale che si può avere tra i punti C e D.

Si dice che tra due punti di un circuito (che stanno sullo stesso ramo) vi è un circuito aperto quando i due punti sono fra loro scollegati.

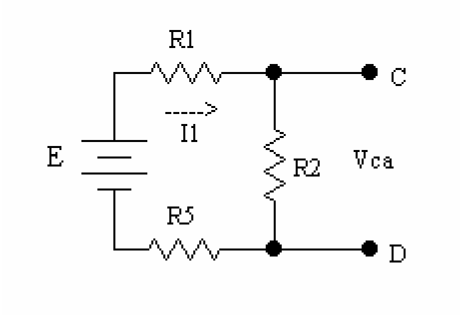
Le caratteristiche di un circuito aperto sono:

a. Tensione massima: V_{ca}

b. Corrente nulla: $I = 0$

c. Tutti i bipoli che stanno sullo stesso ramo del circuito aperto risultano elettricamente scollegati.

Il circuito di fig. 3 si riduce al seguente:



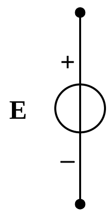
$$V_{ca} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_5} E = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} 12 = 3V$$

Che è il massimo valore di tensione ottenibile tra i punti C e D. confrontare col valore V_3 del circuito di fig. 1 ($V_3 = 1{,}6V$).

1.8. – Generatori ideali

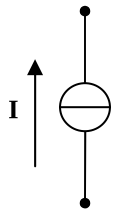
Il generatore reale è un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale ai suoi morsetti ed erogare corrente, ossia fornire energia.

Generatore ideale di tensione: si definisce generatore ideale di tensione un generatore in grado di mantenere ai suoi estremi la stessa differenza di potenziale qualunque sia la corrente erogata.



Simbolo elettrico del generatore ideale di tensione

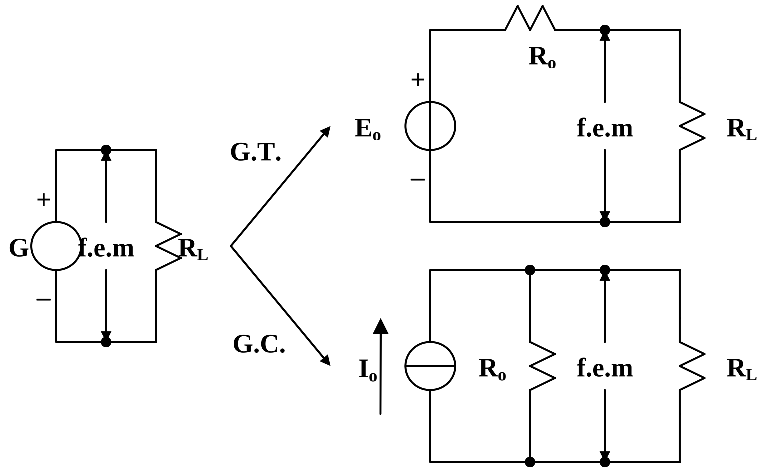
Generatore ideale di corrente: si definisce generatore ideale di corrente un generatore in grado di erogare la stessa corrente qualunque sia la differenza di potenziale ai cuoi capi.



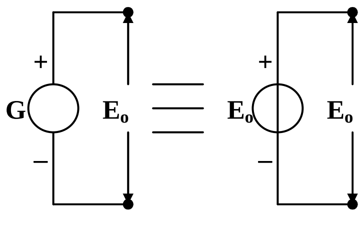
Simbolo elettrico del generatore ideale di corrente

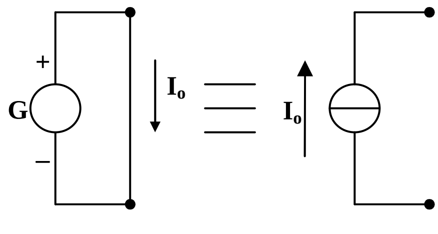
1.9. – Schematizzazione di un generatore reale come generatore di tensione e come generatore di corrente. Principio del generatore equivalente

in un generatore reale, all'aumentare della corrente erogata diminuisce la differenza di potenziale ai suoi morsetti. Tale comportamento può essere schematizzato utilizzando i generatori ideali, tenendo conto delle variazioni della sua forza elettromotrice al variare della corrente mediante un opportuno valore di resistenza.
Si può schematizzare un generatore reale come generatore di tensione o generatore di corrente.

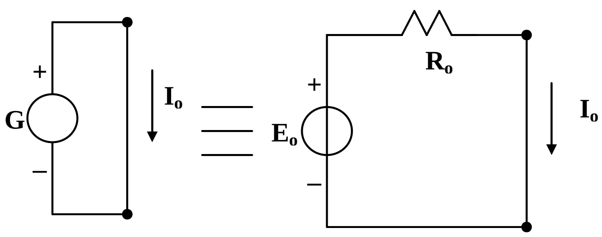


Un generatore reale si comporta come un generatore ideale di tensione solo quando i suoi morsetti sono aperti; come un generatore ideale di corrente solo quando i suoi morsetti sono in corto circuito. Tenendo conto di ciò, possiamo definire e calcolare la f.e.m. del generatore ideale di tensione E_0 come la tensione a vuoto tra i morsetti del generatore reale; possiamo definire la corrente erogata dal generatore ideale di corrente I_0 come corrente di corto circuito tra i morsetti del generatore reale.



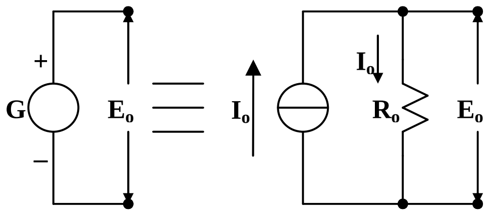


Per definire la resistenza R_0 basta notare che se si cortocircuitano i morsetti del generatore di tensione deve circolare la corrente di corto circuito I_0.



$$\Rightarrow \qquad R_O = \frac{E_O}{I_O}$$

La resistenza R_0 si calcola come rapporto tra la tensione a vuoto E_0 e la corrente di corto circuito I_0 del generatore reale.
Analogamente, se si aprono i morsetti del generatore di corrente, tra tali morsetti dovrà esserci la tensione a vuoto E_0.

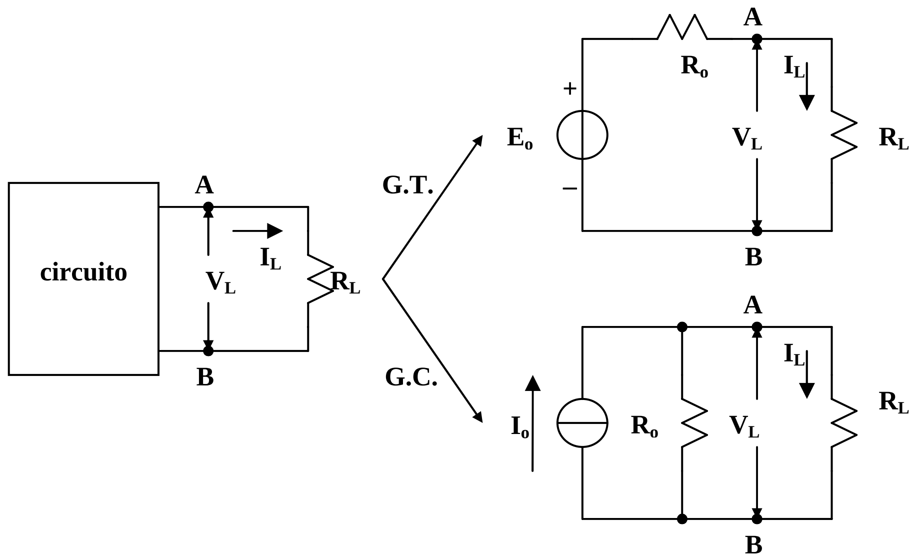


$$\Rightarrow \qquad R_O = \frac{E_O}{I_O}$$

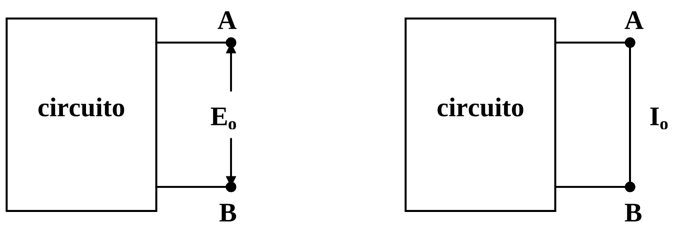
Le due schematizzazioni sono esattamente equivalenti e si può passare dall'una all'altra utilizzando la relazione $E_O = R_O I_O$.

Riassumendo
Un generatore reale è schematizzabile come generatore di tensione o come generatore di corrente. La f.e.m. del generatore ideale di tensione E_0 è la tensione a vuoto del generatore reale; la corrente erogata dal generatore ideale di corrente I_0 è la corrente dio corto circuito del generatore reale; la resistenza R_0, posta in serie al generatore ideale di tensione E_0 e in parallelo al generatore ideale di corrente I_0, si calcola come rapporto tra la tensione a vuoto E_0 e la corrente di corto circuito I_0 del generatore reale.

Si è definito un generatore reale come dispositivo in grado di mantenere ai suoi morsetti una differenza di potenziale ed erogare corrente, ossia erogare potenza. Se, in un circuito, si considerano i puntici è collegato un utilizzatore (resistenza) o un ramo, tali punti, poiché tra essi vi è una differenza di potenziale e viene erogata corrente (ossia viene erogata potenza all'utilizzatore o al ramo), si comportano come morsetti di un generatore reale. Pertanto, l'intero circuito, visto dai capi di un utilizzatore o di un ramo, può essere schematizzato come generatore di tensione o generatore di corrente.



E_0 è la tensione a vuoto tra i due punti A e B, I_0 è la corrente di corto circuito tra i punti A e B, R_0 si calcola come rapporto tra la tensione a vuoto E_0 e la corrente di corto circuito I_0.



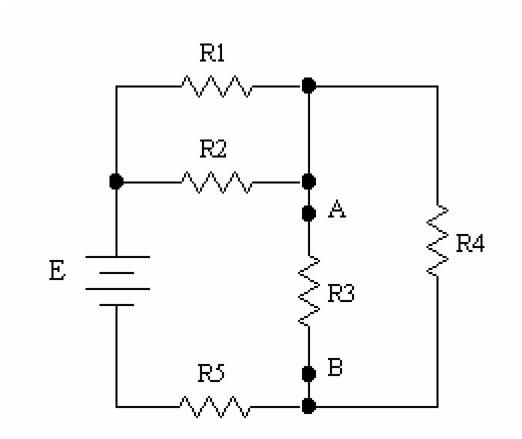
$$R_O = \frac{E_O}{I_O}$$

Riassumendo
Il circuito visto dai capi di un utilizzatore o di un ramo è equivalente ad un generatore di tensione o ad un generatore di corrente. La f.e.m. E_0 del generatore ideale di tensione è la tensione a vuoto tra i due punti considerati; la corrente I_0 del generatore ideale di corrente è la corrente di corto circuito tra i due punti; R_0 si calcola come rapporto tra la tensione a vuoto E_0 e la corrente di corto circuito I_0.

Quanto su detto viene definito **principio del generatore equivalente**.

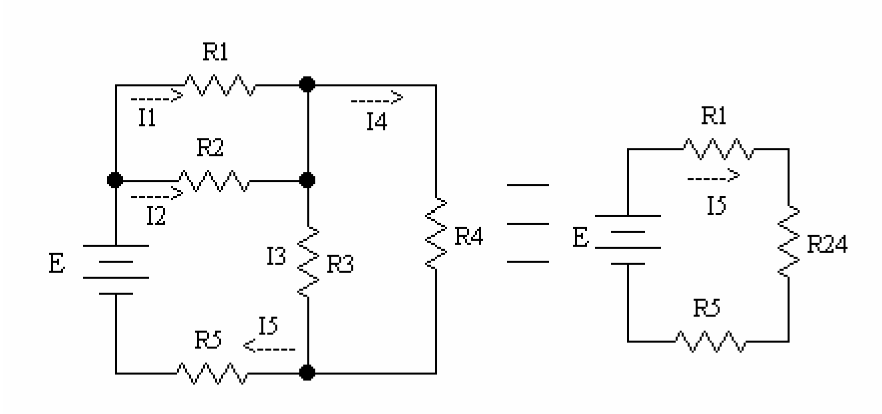
1.9.1. - Esempio

Dopo avere risolto il circuito di figura, applicare tra i punti A e B il principio del generatore equivalente.



$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_5 = 2{,}2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_4 = 3{,}3K\Omega$$

Risoluzione del circuito



$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 3{,}3 \cdot 10^3}{2{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^3} = 1{,}32K\Omega \quad ; \quad R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 3{,}3 \cdot 10^3}{2{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^3} = 1{,}32K\Omega$$

$$I_5 = \frac{E}{R_{12} + R_{34} + R_5} = \frac{12}{1{,}32 \cdot 10^3 + 1{,}32 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3} = 2{,}48mA$$

$$V_{12} = V_1 = V_2 = R_{12} \cdot I_5 = 1{,}32 \cdot 10^3 \cdot 2{,}48 \cdot 10^{-3} = 3{,}27V$$

$$V_{34} = V_{31} = V_4 = R_{34} \cdot I_5 = 1{,}32 \cdot 10^3 \cdot 2{,}48 \cdot 10^{-3} = 3{,}27V$$

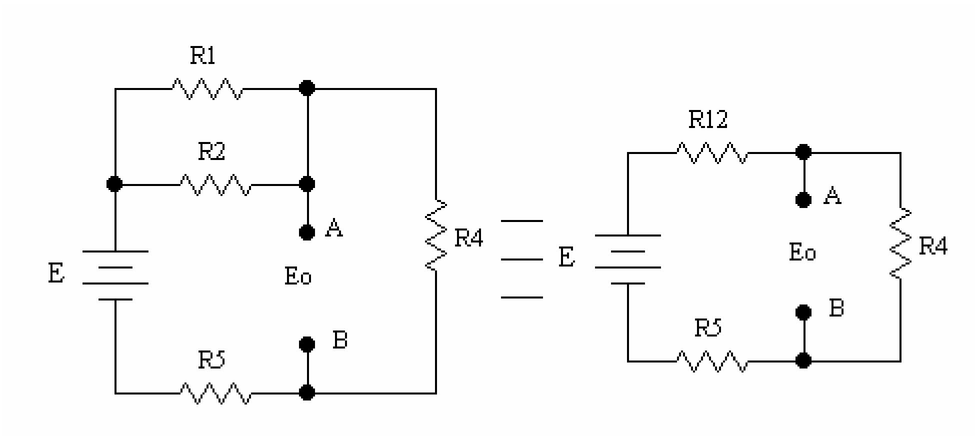
$$V_5 = R_5 \cdot I_5 = 2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}48 \cdot 10^{-3} = 5{,}46V$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{3{,}27}{2{,}2 \cdot 10^3} = 1{,}49mA \quad ; \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{3{,}27}{3{,}3 \cdot 10^3} = 0{,}99mA$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_4} = \frac{3{,}27}{2{,}2 \cdot 10^3} = 1{,}49mA \quad ; \quad I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{3{,}27}{3{,}3 \cdot 10^3} = 0{,}99mA$$

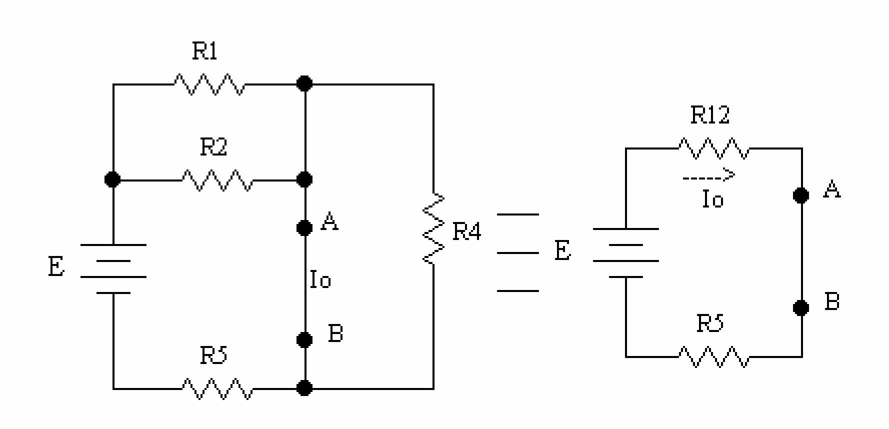
Si applica il principio del generatore equivalente tra i punti A e B

Calcolo di E_0



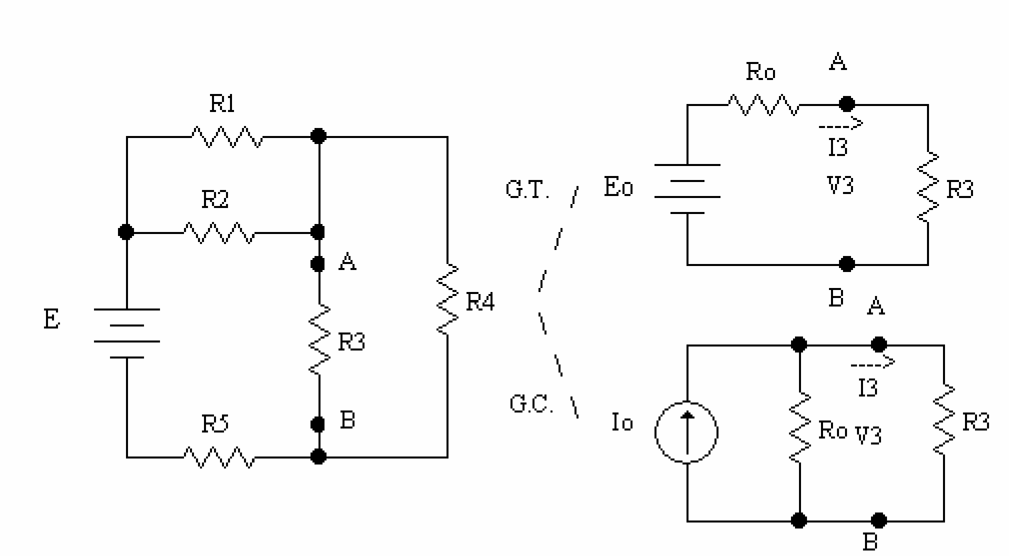
$$E_o = \frac{R_4}{R_{12} + R_4 + R_5} E = \frac{3{,}3 \cdot 10^3}{1{,}32 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3} 12 = 5{,}8V$$

Calcolo di I_0

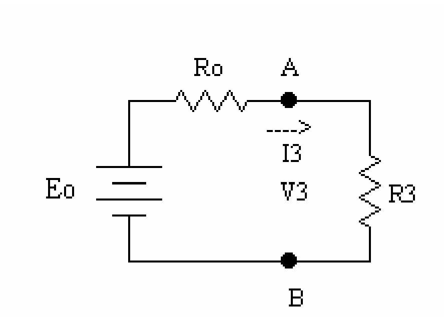


$$I_o = \frac{E}{R_{12} + R_5} = \frac{12}{1{,}32 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}41mA$$

Calcolo di R_0 $$R_o = \frac{E_o}{I_o} = \frac{5{,}8}{3{,}41 \cdot 10^{-3}} = 1{,}7K\Omega$$

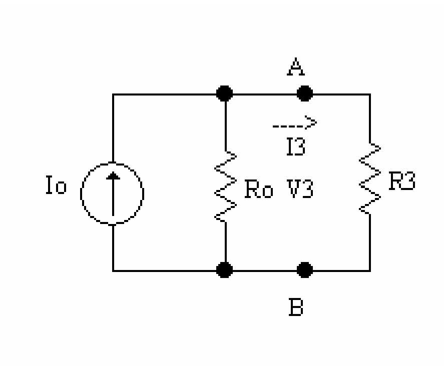


Si calcola, per i due circuiti equivalenti ottenuti, la tensione V_3 e la corrente I_3 e si confrontano i valori con quelli già calcolati.



$$I_3 = \frac{E_o}{R_o + R_3} = \frac{5{,}8}{1{,}7 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3} = 1{,}49\text{mA}$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}49 \cdot 10^{-3} = 3{,}28\text{V}$$



$$R_{o3} = \frac{R_o \cdot R_3}{R_0 + R_3} = \frac{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 2{,}2 \cdot 10^3}{1{,}7 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3} = 0{,}96\text{K}\Omega$$

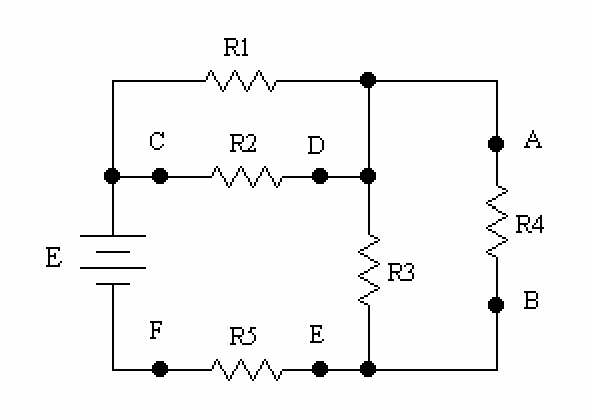
$$V_3 = R_{03} \cdot I_o = 0{,}96 \cdot 10^3 \cdot 3{,}41 \cdot 10^{-3} = 3{,}27\text{V}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{3{,}27}{2{,}2 \cdot 10^3} = 1{,}49\text{mA}$$

I valori coincidono con quelli già calcolati.
L’utilità di questa rappresentazione si apprezza in tutti quei casi in cui un circuito cambia, ripetitivamente, il valore di una sola resistenza e quello che interessa conoscere è la tensione e la corrente in tale resistenza.

1.9.2. - Esercizio da svolgere

Dopo avere risolto il circuito, applicare il principio del generatore equivalente tra i punti A e B, C e D, E e F. dei circuiti equivalenti ottenuti, calcolare la corrente e la tensione per, rispettivamente, le resistenze R_4, R_2, R_5.



$$E = 12V \;\; ; \;\; R_1 = R_3 = 2K\Omega$$

$$R_2 = R_5 = 4K\Omega \;\; ; \;\; R_4 = 3K\Omega$$

Risposte $I_1 = 1{,}225mA \;;\; I_2 = 0{,}612mA \;;\; I_3 = 1{,}1mA \;;\; I_4 = 0{,}73mA \;;\; I_5 = 1{,}836mA$

$$V_1 = V_2 = 2{,}44V \;;\; V_3 = V_4 = 2{,}2V \;;\; V_5 = 7{,}35V$$

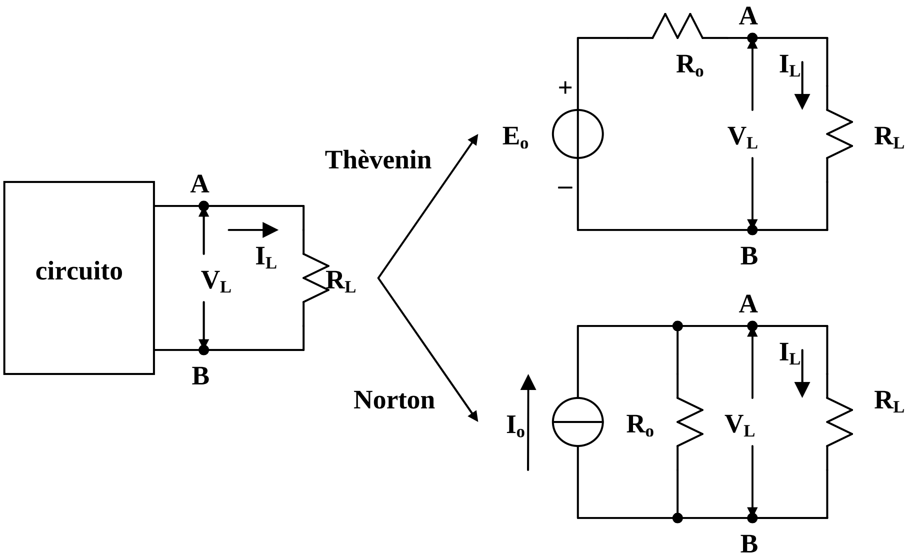
$$\text{punti AB}: \; E_o = 3{,}27V \;;\; I_o = 2{,}25mA \;;\; R_o = 1{,}45K\Omega$$

$$\text{punti CD}: \; E_o = 3{,}33V \;;\; I_o = 2{,}31mA \;;\; R_o = 1{,}44K\Omega$$

$$\text{punti EF}: \; E_o = 12V \;;\; I_o = 4{,}74mA \;;\; R_o = 2{,}53K\Omega$$

1.10. – Teorema di Thèvenin e teorema di Norton

I teoremi di Thèvenin e di Norton sono analoghi al principio del generatore equivalente.
Il teorema di Thèvenin schematizza il circuito, visto da un utilizzatore o da un ramo, come generatore di tensione: il teorema di Norton lo schematizza come generatore di corrente.

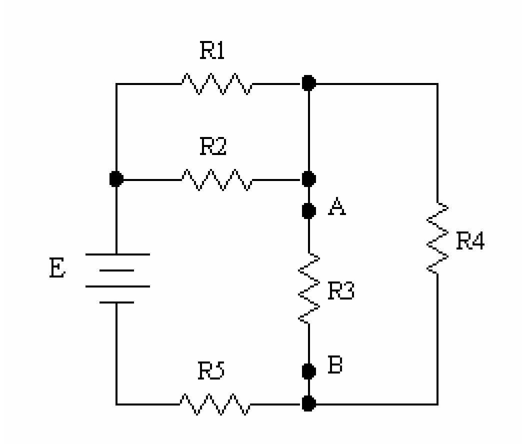


Teorema di Thèvenin
Dato un circuito comunque complesso, purché lineare, visto dai capi di un utilizzatore o di un ramo, può essere schematizzato come generatore di tensione. La f.e.m. E_0 del generatore ideale di tensione è la tensione a vuoto tra i due punti considerati. La resistenza equivalente R_0, posta in serie al generatore ideale di tensione, è la resistenza vista tra i due punti a vuoto una volta cortocircuitati i generatori di tensione e aperti quelli di corrente.

Teorema di Norton
Dato un circuito comunque complesso, purché lineare, visto dai capi di un utilizzatore o di un ramo, può essere schematizzato come generatore di corrente. La corrente I_0 del generatore ideale di corrente è la corrente di corto circuito tra i due punti considerati. La resistenza equivalente R_0, posta in serie al generatore ideale di tensione, è la resistenza vista tra i due punti a vuoto una volta cortocircuitati i generatori di tensione e aperti quelli di corrente.

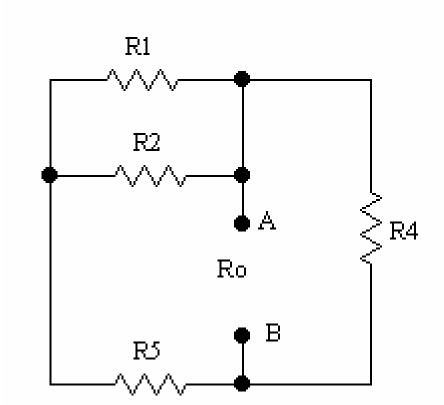
1.10.1. - Esempio

Calcolo di R_0 dell'esempio precedente secondo Thèvenin e Norton.

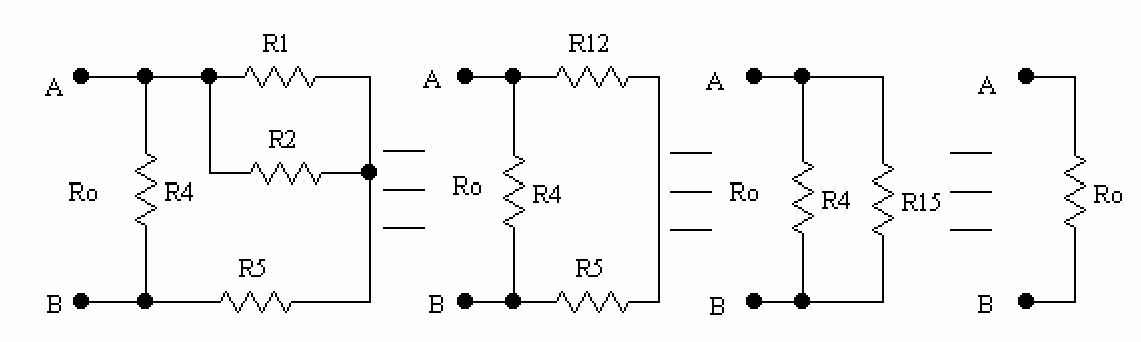


$$E = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = R_5 = 2{,}2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_4 = 3{,}3K\Omega$$

Si ridisegna il circuito omettendo la resistenza R_3, lasciando i due punti A e B aperti, e cortocircuitando il generatore di tensione E (ossia sostituendogli un corto circuito).



Visto dai punti A e B si può ridisegnare il circuito nel seguente modo:



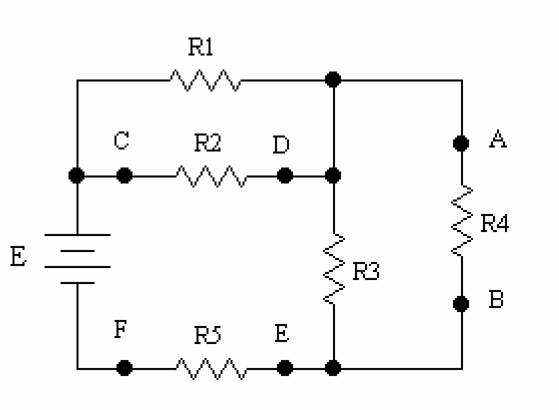
Da tale circuito risulta evidente che il parallelo di R_1 e R_2 è in serie con R_5, e tale ramo è in parallelo ad R_4.

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 3{,}3 \cdot 10^3}{2{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^3} = 1{,}32\text{K}\Omega \quad ; \quad R_{15} = R_{12} + R_5 = 1{,}32 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3 = 3{,}52\text{K}\Omega$$

$$R_o = \frac{R_4 \cdot R_{15}}{R_4 + R_{15}} = \frac{3{,}3 \cdot 10^3 \cdot 3{,}52 \cdot 10^3}{3{,}3 \cdot 10^3 + 3{,}52 \cdot 10^3} = 1{,}7\text{K}\Omega \qquad \text{valore identico al precedente.}$$

1.10.2. - Esercizio da svolgere

Trovare la resistenza equivalente R_o, secondo Thèvenin e Norton dell'esercizio di paragrafo 1.9.2.



$$E = 12\text{V} \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2\text{K}\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = 4\text{K}\Omega \quad ; \quad R_4 = 3\text{K}\Omega$$

Risposte punti AB: $R_o = 1{,}45\text{K}\Omega$; punti CD: $R_o = 1{,}44\text{K}\Omega$; punti EF: $R_o = 2{,}53\text{K}\Omega$

2. – RISOLUZIONE DI CIRCUITI LINEARI CON PIÙ GENERATORI

2.1. – II principio di Kirchhoff

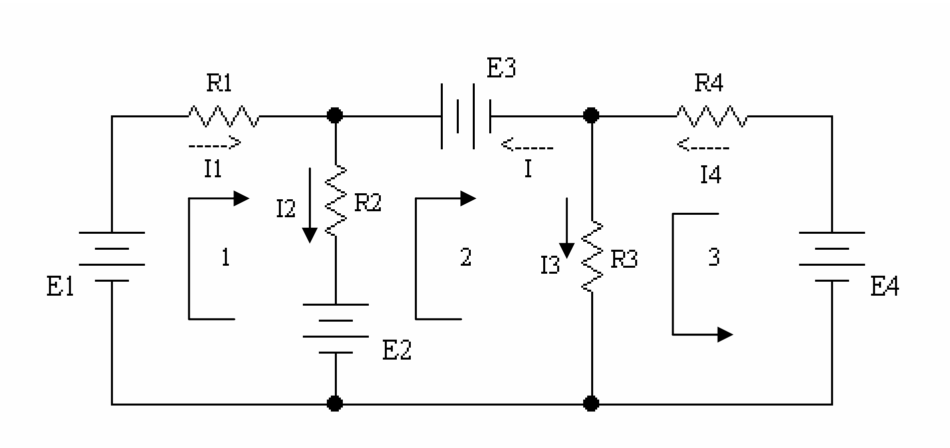
Il secondo principio di Kirchhoff si applica alle maglie.

In una maglia, una volta scelto il verso di percorrenza, la somma algebrica delle forze elettromotrici (f.e.m.) è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione (c.d.t.).

$$\sum E = \sum R \cdot I$$

Si prendono positive le f.e.m. se il verso di percorrenza le attraversa dal morsetto negativo a quello positivo, negative se viceversa (se le attraversa dal + al –). Si prendono positive le c.d.t. se il verso della corrente è concorde con quello di percorrenza, negative se viceversa.

Ad esempio



$$1: \quad E_1 - E_2 = R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 \ ; \quad 2: \quad -E_2 + E_3 = -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \ ; \quad 2: \quad E_4 = -R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4$$

2.2. – Risoluzione di un circuito con più generatori

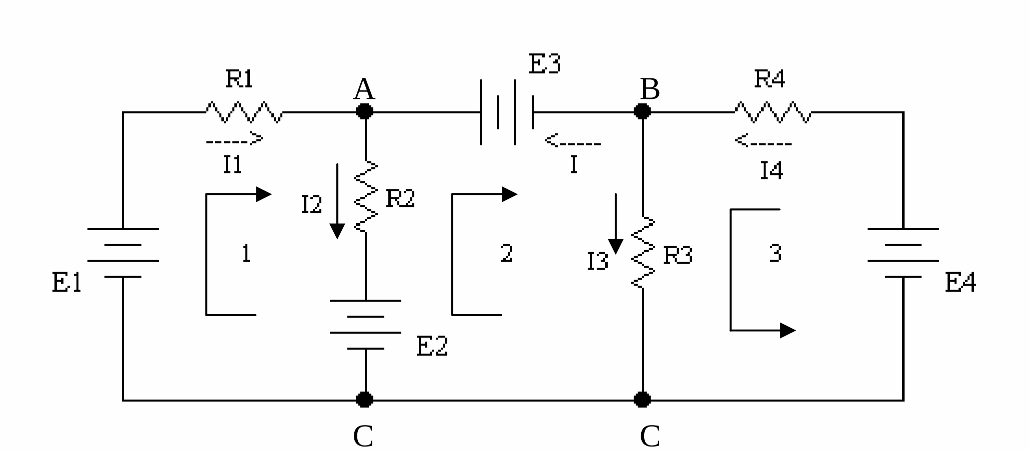
Un qualunque circuito lineare può essere risolto applicando i due principi di Kirchhoff.
Se in un circuito sono note le correnti, le differenze di potenziale si calcolano applicando la legge di Ohm ai capi di ogni resistenza.
In un circuito vi sono tante correnti quanti sono i rami **r**. per potere determinare il valore delle correnti occorrono, quindi, **r** equazioni linearmente indipendenti, che esprimano dei legami tra le correnti incognite. Tali equazioni si ottengono applicando i principi di Kirchhoff.
In un circuito si possono scrivere **n – 1** equazioni linearmente indipendenti ai nodi (infatti, se **n** è il numero dei nodi, i nodi indipendenti sono **n – 1**) ed **m = r – (n – 1)** equazioni linearmente indipendenti alle maglie (infatti, se **r** è il numero dei rami ed **n** il numero dei nodi, **m = r – (n – 1)** è il numero delle maglie indipendenti).
In totale, applicando i principi di Kirchhoff, si possono scrivere **n – 1 + m = n – 1 + r – (n – 1) = r** equazioni linearmente indipendenti:

- **n – 1** equazioni ai nodi

- **m = r – (n – 1)** equazioni alle maglie

mettendo a sistema tali equazioni, si ottiene un sistema di **r** equazioni in **r** incognite, la cui soluzione sono i valori delle correnti.
Nel circuito, i versi delle correnti possono essere scelti arbitrariamente. Se, risolvendo il sistema, una delle correnti risulta negativa significa che il verso scelto per essa non è quello effettivo ma quello opposto. Dopo la risoluzione è sufficiente cambiare verso e segno alle correnti negative.

2.2.1. - Esempio



$$E_1 = E_3 = 8V \quad ; \quad E_2 = E_4 = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_4 = 4K\Omega$$

Nel circuito vi sono **n = 3** nodi e **r = 5** rami; quindi, **5** correnti incognite.
I nodi indipendenti sono **n – 1 = 3 –2 = 2** ; le maglie indipendenti sono **m = r – (n – 1) = 5 – 2 = 3**.
Si scrivono **2** equazioni ai nodi e **3** equazioni alle maglie.
Si scelgono i nodi **A** e **B** e le maglie **ACA**, **ABCA**, **BCB**:

$$A: \quad I_1 + I = I_2 \qquad B: \quad I_4 = I + I_3$$

$$\begin{aligned} &ACA: && E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ &ABCA: && E_2 - E_3 = -R_2 I_2 + R_3 I_3 \\ &BCB: && E_4 = R_3 I_3 + R_4 I_4 \end{aligned}$$

Si mettono a sistema queste 5 equazioni:

$$\begin{cases} I_1 + I = I_2 \quad \Rightarrow \quad I = -I_1 + I_2 \\ I_4 = I + I_3 \quad \Rightarrow \quad I_4 = -I_1 + I_2 + I_3 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - E_2 \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 - E_3 \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_4 \quad \Rightarrow \quad R_3 I_3 + R_4 (-I_1 + I_2 + I_3) = E_4 \quad \Rightarrow \quad -R_4 I_1 + R_4 I_2 + (R_3 + R_4) I_3 = E_4 \end{cases}$$

Si sostituiscono i valori delle resistenze e delle forze elettromotrici e si risolve il sistema costituito dalle ultime 3 equazioni.

$$\begin{cases} 2\cdot 10^3 I_1 + 4\cdot 10^3 I_2 = 8 - 12 \\ -4\cdot 10^3 I_2 + 2\cdot 10^3 I_3 = 12 - 8 \\ -4\cdot 10^3 I_1 + 4\cdot 10^3 I_2 + 6\cdot 10^3 I_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot 10^3 I_1 + 2\cdot 10^3 I_2 = -2 \qquad (*) \\ -2\cdot 10^3 I_2 + 1\cdot 10^3 I_3 = 2 \\ -2\cdot 10^3 I_1 + 2\cdot 10^3 I_2 + 3\cdot 10^3 I_3 = 6 \end{cases}$$

Si sommano membro a membro le prime due equazioni:

$$\begin{cases} 1\cdot 10^3 I_1 + 2\cdot 10^3 I_2 = -2 \\ \underline{-2\cdot 10^3 I_2 + 1\cdot 10^3 I_3 = 2} \end{cases}$$

$$1\cdot 10^3 I_1 + 1\cdot 10^3 I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -I_3$$

Si sostituisce $-I_3$ al posto di I_1 nella terza equazione, la si mette a sistema con la seconda e si somma membro a membro:

$$\begin{cases} -2\cdot 10^3 I_2 + 1\cdot 10^3 I_3 = 2 \\ 2\cdot 10^3 I_3 + 2\cdot 10^3 I_2 + 3\cdot 10^3 I_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\cdot 10^3 I_2 + 1\cdot 10^3 I_3 = 2 \\ \underline{2\cdot 10^3 I_2 + 5\cdot 10^3 I_3 = 6} \end{cases}$$

$$6\cdot 10^3 I_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{8}{6\cdot 10^3} = 1{,}33\text{mA}$$

$I_1 = -I_3 = -1{,}33\text{mA}$ il segno meno sta ad indicare che il verso scelto per I_1 è opposto a quello effettivo

dall'equazione $(*)$ si calcola I_2:

$$I_2 = \frac{-2 - 1\cdot 10^3 I_1}{2\cdot 10^3} = \frac{-2 - 1\cdot 10^3\left(-1{,}33\cdot 10^{-3}\right)}{2\cdot 10^3} = -0{,}33\text{mA}$$

anche il verso scelto per I_2 è opposto a quello effettivo.

Si calcolano I e I_4:

$$I = -I_1 + I_2 = -\left(-1{,}33\cdot 10^{-3}\right) + \left(-0{,}33\cdot 10^{-3}\right) = 1\text{mA}$$

$$I_4 = I + I_3 = 1\cdot 10^{-3} + 1{,}33\cdot 10^{-3} = 2{,}33\text{mA}$$

Riassumendo

$$I = 1\text{mA} \quad ; \quad I_1 = 1{,}33\text{mA} \quad ; \quad I_2 = 0{,}33\text{mA} \quad ; \quad I_3 = 1{,}33\text{mA} \quad ; \quad I_4 = 2{,}33\text{mA}$$

Si calcolano le cadute di tensione:

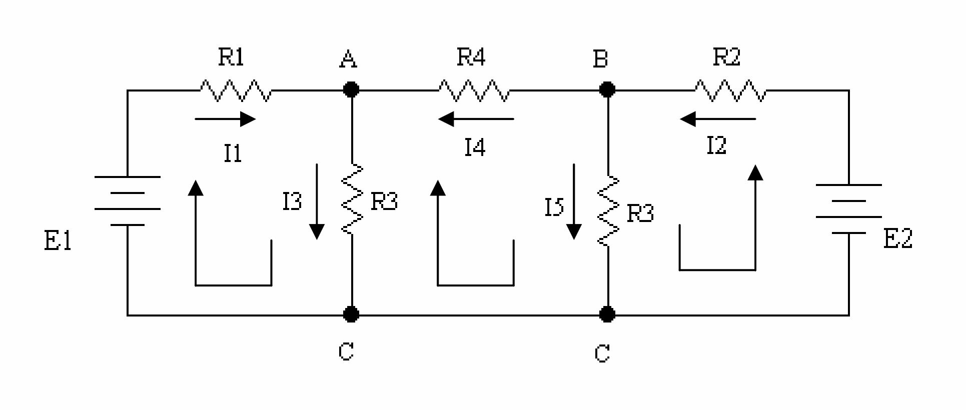
$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 2{,}67V \quad ; \quad V_2 = R_2 \cdot I_2 = 4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}33 \cdot 10^{-3} = 2{,}33V$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-3} = 2{,}67V \quad ; \quad V_4 = R_4 \cdot I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-3} = 9{,}33V$$

2.2.2. – Esercizi da svolgere

Risolvere i seguenti circuiti applicando i principi di Kirchhoff.

Esercizio parzialmente risolto



$$E_1 = 8V \;\; ; \;\; E_2 = 12V \;\; ; \;\; R_1 = R_4 = 2K\Omega \;\; ; \;\; R_2 = R_3 = R_4 = 4K\Omega$$

Vi sono 5 rami, 2 nodi indipendenti e 3 maglie indipendenti.
Si scrivono 2 equazioni ai nodi **A** e **B** e 3 equazioni alle maglie **ACA**, **ABCA**, **BCB**:

$A: \quad I_1 + I_4 = I_3 \qquad\qquad B: \quad I_2 = I_4 + I_5$

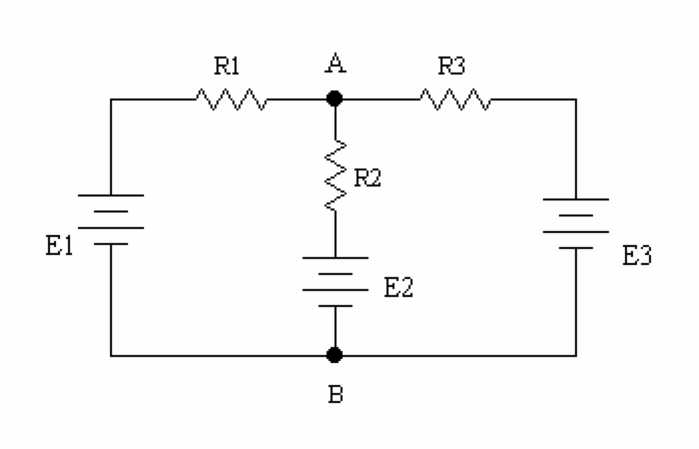
$ACA: \quad E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$

$ABCA: \quad 0 = -R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5$

$BCB: \quad E_2 = R_2 I_2 + R_5 I_5$

Risposte $\quad I_1 = 1mA \quad ; \quad I_2 = 2{,}125mA \quad ; \quad I_3 = 0{,}25mA \quad ; \quad I_4 = 1{,}25mA$

Esercizio facilitato

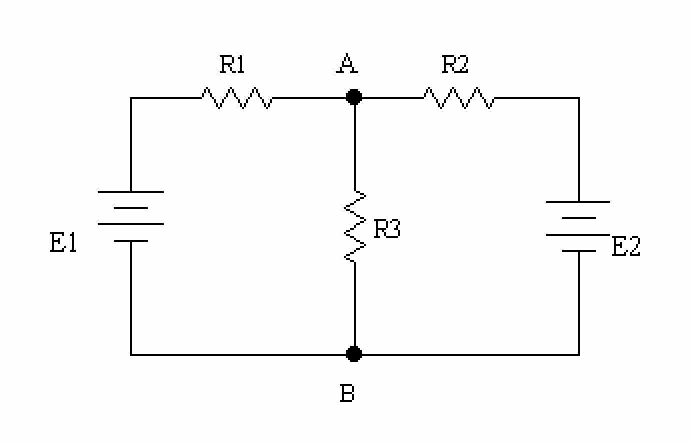


$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 4V \quad ; \quad E_3 = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = 4K\Omega$$

Nel circuito vi sono 3 rami, 1 nodo indipendente e 2 maglie indipendenti. Si scelgono i versi delle correnti, i versi di percorrenza e si scrive 1 equazione ai nodi e 2 equazioni alle maglie.

Risposte $I_1 = 0{,}4mA \quad ; \quad I_2 = 2{,}8mA \quad ; \quad I_3 = 2{,}4mA$

Esercizio



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 4V \quad ; \quad R_1 = R_2 = 2K\Omega \quad ; \quad R_3 = 4K\Omega$$

Risposte $I_1 = 3{,}2mA \quad ; \quad I_2 = 2{,}8mA \quad ; \quad I_3 = 0{,}4mA$

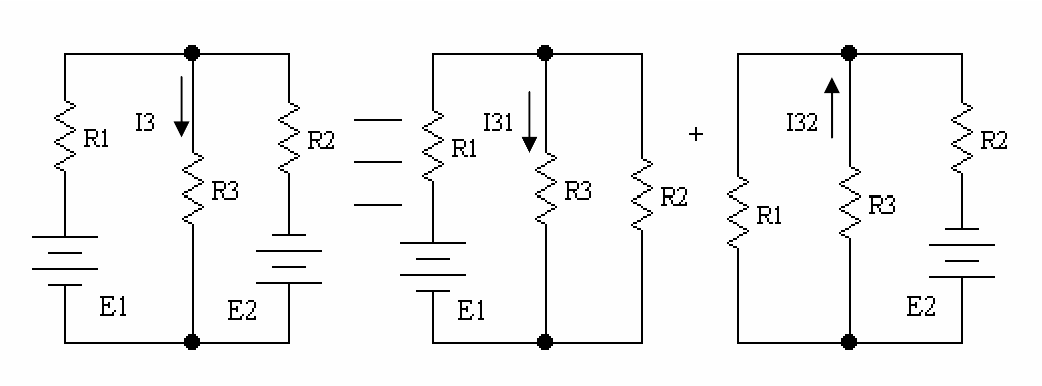
2.3. – Principio di sovrapposizione degli effetti

Se in un circuito lineare agiscono più cause (generatori) è possibile calcolare di differenza di potenziale tra due punti o la corrente in un ramo come sovrapposizione degli effetti di ogni causa agente singolarmente.

Per fare agire un generatore per volta si devono disattivare gli altri: si cortocircuitano quelli di tensione e si aprono quelli di corrente.
La somma degli effetti è una somma algebrica. Si sceglie un verso come positivo per le tensioni e le correnti e, nella somma degli effetti, si prendono positive le grandezze (tensione o corrente) con tale verso, negative quelle con verso opposto.

2.3.1. – Esempio

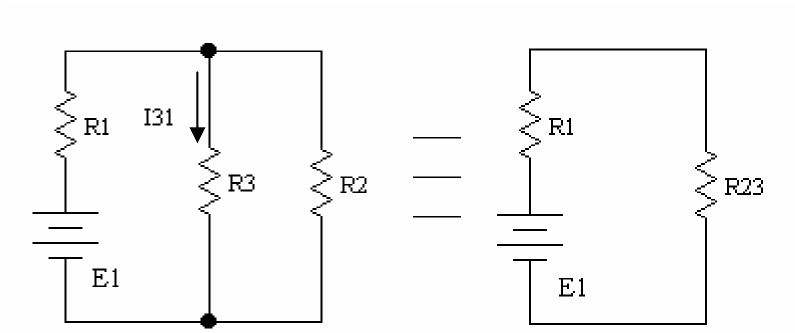
Del circuito di figura, calcolare la corrente I_3.



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 4V \quad ; \quad R_1 = R_2 = 2K\Omega \quad ; \quad R_3 = 4K\Omega$$

Si assume quale verso positivo della corrente I_3 quello verso il basso.
$I_3 = I_{31} + I_{32}$ è la somma algebrica dei contributi di E_1 ed E_2.

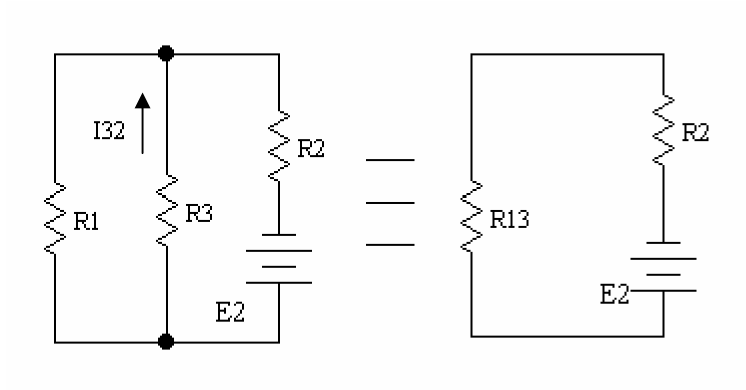
<u>Si cortocircuita E_2 e si calcola il contributo I_{31} dovuto ad E_1:</u>



$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega \quad ; \quad V_{31} = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} E_1 = \frac{1{,}33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 1{,}33 \cdot 10^3} 8 = 3{,}2V$$

$$I_{31} = \frac{V_{31}}{R_3} = \frac{3{,}2}{4 \cdot 10^3} = 0{,}8mA$$

Si cortocircuita E_1 e si calcola il contributo I_{32} dovuto ad E_2:



$$R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}33K\Omega \quad ; \quad V_{32} = \frac{R_{13}}{R_2 + R_{13}} E_2 = \frac{1{,}33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 1{,}33 \cdot 10^3} 4 = 1{,}6V$$

$$I_{32} = \frac{V_{32}}{R_3} = \frac{1{,}6}{4 \cdot 10^3} = 0{,}4mA$$

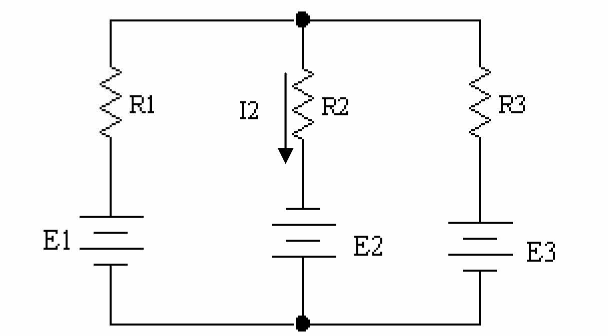
Si sommano i due contributi, I_{31} con segno positivo e I_{32} con segno negativo:

$$I_3 = I_{31} - I_{32} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} - 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}4mA$$

Il principio di sovrapposizione degli effetti e particolarmente utile quando in un circuito agiscono generatori di diversa natura. Ad esempio, generatori di corrente continua e di corrente alternata.

2.3.2. – Esercizio da assegnare

Del circuito di figura calcolare la corrente I_2.



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_2 = 4V \quad ; \quad E_3 = 12V \quad ; \quad R_1 = R_3 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = 4K\Omega$$

Si assume quale verso positivo della corrente I_3 quello verso il basso.

Risposta $I_2 = 2{,}8mA$

2.4. – Teorema di Millman

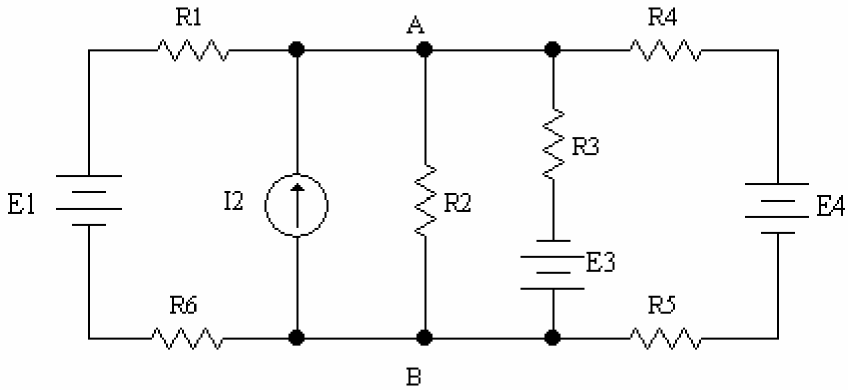
Se in un circuito lineare vi sono due punti rispetto ai quali tutti i rami sono in parallelo, è possibile calcolare la differenza di potenziale tra tali punti come rapporto tra la somma algebrica delle correnti di corto circuito, dei rami contenenti generatori, e la somma delle conduttanze di tutti i rami.

Indicati con **A** e **B** i due punti e assumendo il punto **A** a potenziale maggio del punti **B**, si prendono positive le correnti di corto circuito il cui verso è tale da passare da **A** a **B** esternamente al ramo, negative se viceversa.

La conduttanza è definita come l'inverso della resistenza $G = \frac{1}{R}$ e si misura in siemens **S** (Ω^{-1}).

$$V_{AB} = \frac{\sum I_{CC}}{\sum \frac{1}{R}}$$

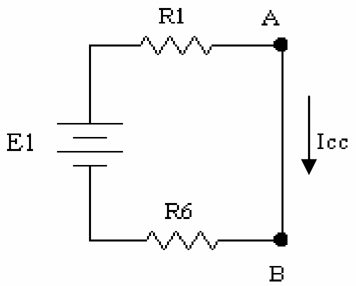
2.4.1.- Esempio



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_3 = 4V \quad ; \quad E_4 = 12V \quad ; \quad I_2 = 4mA$$

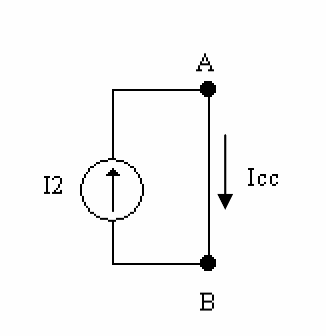
$$R_1 = R_3 = R_4 = 2K\Omega \quad ; \quad R_2 = R_5 = 4K\Omega \quad ; \quad R_6 = 6K\Omega$$

Rispetto ai punti **A** e **B** tutti i rami sono in parallelo.
Al fine di determinare la corrente di corto circuito, bisogna cortocircuitare, mentalmente, il ramo e determinare segno e valore della corrente. Si applica in dettaglio tale metodologia. Si considerino, in successione, i rami con i generatori e li si cortocircuiti.



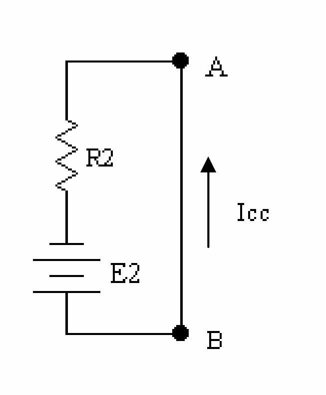
Il segno della corrente, poiché va da **A** a **B** esternamente al ramo, è positiva; il suo valore si determina applicando la legge di Ohm ai capi del generatore:

$$I_{CC} = \frac{E_1}{R_1 + R_6} \quad ; \quad G = \frac{1}{R_1 + R_6}$$



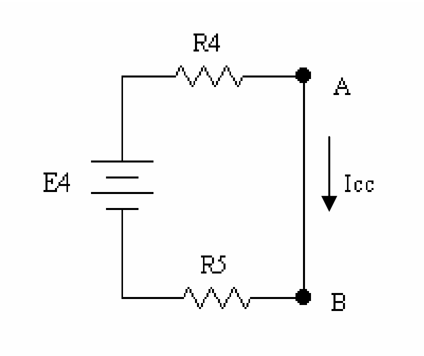
Il segno della corrente, poiché va da **A** a **B** esternamente al ramo, è positiva

$$I_{CC} = I_2 \quad ; \quad G = \infty$$



Il segno della corrente, poiché va da **B** a **A** esternamente al ramo, è negativa; il suo valore si determina applicando la legge di Ohm ai capi del generatore:

$$I_{CC} = -\frac{E_3}{R_3} \quad ; \quad G = \frac{1}{R_3}$$



Il segno della corrente, poiché va da **A** a **B** esternamente al ramo, è positiva; il suo valore si determina applicando la legge di Ohm ai capi del generatore:

$$I_{CC} = \frac{E_4}{R_4 + R_5} \quad ; \quad G = \frac{1}{R_4 + R_5}$$

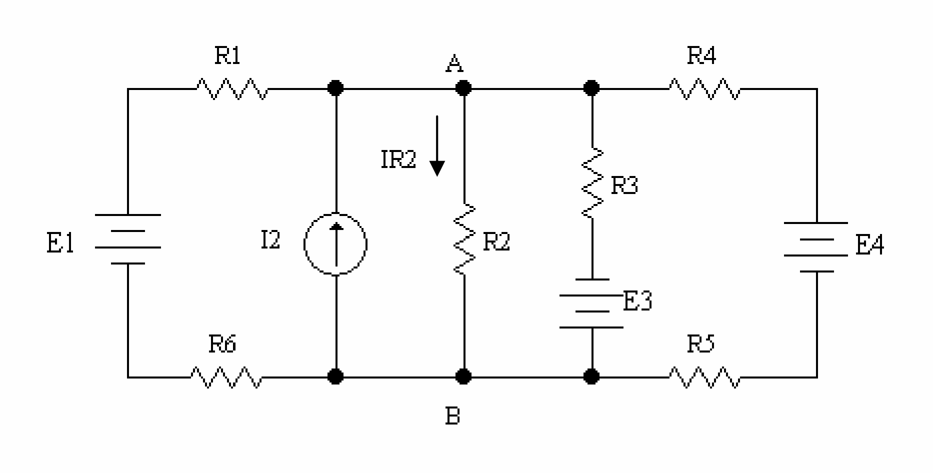
Si calcola V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_6} + I_2 - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4 + R_5}}{\frac{1}{R_1 + R_6} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} = \frac{\frac{8}{2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3} + 4\cdot 10^{-3} - \frac{4}{2\cdot 10^3} + \frac{12}{2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^3}}{\frac{1}{2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3} + \frac{1}{4\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^3}} =$$

$$= \frac{1\cdot 10^{-3} + 4\cdot 10^{-3} - 2\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-3}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \cdot 10^3 = 4{,}8\text{V}$$

Per risolvere il circuito bisogna calcolare le correnti nei rami. Se il ramo non contiene generatori, come il ramo con R_2, è sufficiente applicare la legge di Ohm:

$$I_{R2} = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{4{,}8}{4\cdot 10^3} = 1{,}2\text{mA}$$



Se nel ramo è presente un generatore, bisogna prima determinare il verso della corrente e poi calcolarne il valore.
Il verso viene determinato confrontando la tensione del generatore con la differenza di potenziale V_{AB}. Si suppone che il punto **A** sia a potenziale maggiore del punto **B**.

Se il morsetto del generatore più vicino al punto A è quello positivo, si possono avere due casi possibili:

a. se il potenziale del punto **A** è minore del potenziale del morsetto del generatore, la corrente ha verso tale da uscire dal ramo dal punto **A** e rientrare dal punto **B** (la corrente va dal punto a potenziale più alto a quello più basso); ai capi delle resistenze del ramo si ha una caduta di tensione pari alla differenza tra la forza elettromotrice del generatore e la tensione V_{AB}; si calcola il valore della corrente applicando, alle resistenze del ramo, la legge di Ohm:

$$I_{Ramo} = \frac{E_{GEN} - V_{AB}}{R_{TOT}}$$

b. se il potenziale del punto **A** è maggiore del potenziale del morsetto del generatore, la corrente ha verso tale da entrare dal ramo dal punto **A** e uscire dal punto **B**; ai capi delle resistenze del ramo si ha una caduta di tensione pari alla differenza tra la tensione V_{AB} e la forza elettromotrice del generatore; si calcola il valore della corrente applicando, alle resistenze del ramo, la legge di Ohm:

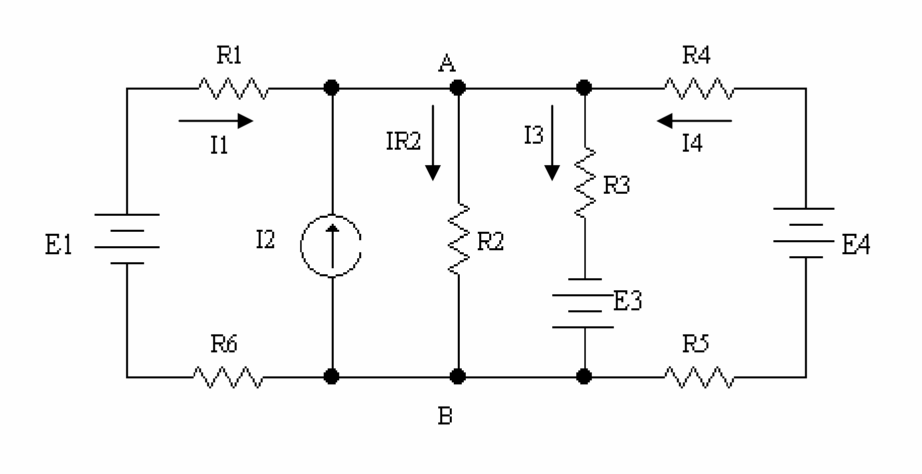
$$I_{Ramo} = \frac{V_{AB} - E_{GEN}}{R_{TOT}}$$

Se il morsetto del generatore più vicino al punto A è quello negativo, si ha:

c. il potenziale del punto **A** è maggiore del potenziale del morsetto del generatore, la corrente ha verso tale da entrare dal ramo dal punto **A** e uscire dal punto **B**; ai capi delle resistenze del ramo si ha una caduta di tensione pari alla somma tra la tensione V_{AB} e la forza elettromotrice del generatore; si calcola il valore della corrente applicando, alle resistenze del ramo, la legge di Ohm:

$$I_{Ramo} = \frac{V_{AB} + E_{GEN}}{R_{TOT}}$$

Si applica quanto detto al circuito dell'esempio.



$$E_1 = 8V \quad ; \quad E_3 = 4V$$

$$E_4 = 12V \quad ; \quad I_2 = 4mA$$

$$R_1 = R_3 = R_4 = 2K\Omega$$

$$R_2 = R_5 = 4K\Omega$$

$$R_6 = 6K\Omega \; ; \; V_{AB} = 4{,}8V$$

I_1: poiché $V_{AB} < E_1 \quad \Rightarrow \quad I_1$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1 + R_6} = \frac{8 - 4{,}8}{2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 0{,}4mA$$

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}8V \qquad ; \qquad V_6 = R_6 \cdot I_1 = 6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 2{,}4V$$

I_3: poiché $V_{AB} > E_3 \quad \Rightarrow \quad I_3$ entra nel ramo dal punto **A** ed esce dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{V_{AB} + E_3}{R_3} = \frac{4{,}8 + 4}{2 \cdot 10^3} = 4{,}4mA$$

$$V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-3} = 8{,}8V \text{ come già si sapeva } V_3 = V_{AB} + E_3 = 4{,}8 + 4 = 8{,}8V$$

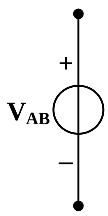
I_4: poiché $V_{AB} < E_4 \quad \Rightarrow \quad I_4$ esce dal ramo dal punto **A** e rientra dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad I_4 = \frac{E_4 - V_{AB}}{R_4 + R_5} = \frac{12 - 4{,}8}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}2mA$$

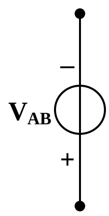
$$V_4 = R_4 \cdot I_4 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 2{,}4V \qquad ; \qquad V_5 = R_5 \cdot I_4 = 4 \cdot 10^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 4{,}8V$$

Un altro modo per calcolare le correnti è quello di considerare la differenza di potenziale V_{AB}, vista da ogni singolo ramo, come fornita da un generatore di tensione:

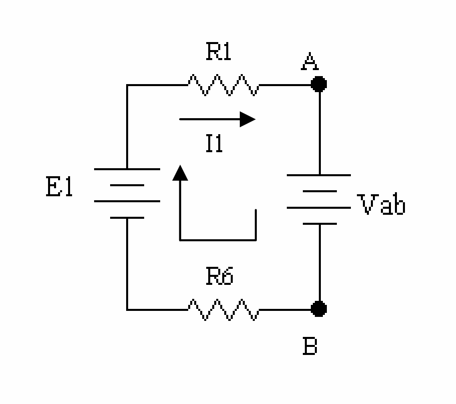
Se $V_{AB} > 0$



Se $V_{AB} < 0$



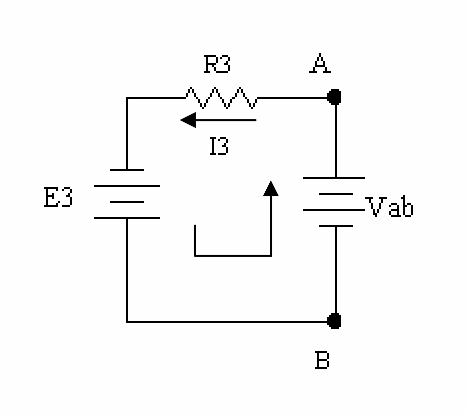
Supponendo $V_{AB} > 0$, si considera ogni ramo chiuso su tale generatore, si applica il secondo principio di Kirchhoff e, dall'equazione ottenuta, si calcola la corrente.



$V_{AB} < E_1 \quad \Rightarrow \quad I_1$ esce dal ramo dal punto **A** e rientrare dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad E_1 - V_{AB} = (R_1 + R_6)I_1 \quad \Rightarrow$$

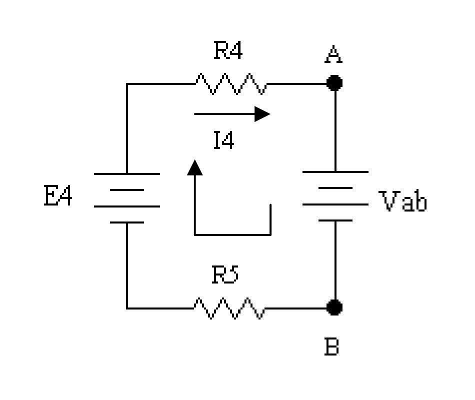
$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1 + R_6} = \frac{8 - 4{,}8}{2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 0{,}4\text{mA}$$



$V_{AB} > E_3 \quad \Rightarrow \quad I_3$ entra nel ramo dal punto **A** ed esce dal punto **B** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V_{AB} + E_3 = R_3 I_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{V_{AB} + E_3}{R_3} = \frac{4{,}8 + 4}{2 \cdot 10^3} = 4{,}4\text{mA}$$



$V_{AB} < E_4 \quad \Rightarrow \quad I_4$ esce dal ramo dal punto **A** e rientrare dal punto **B** $\Rightarrow$

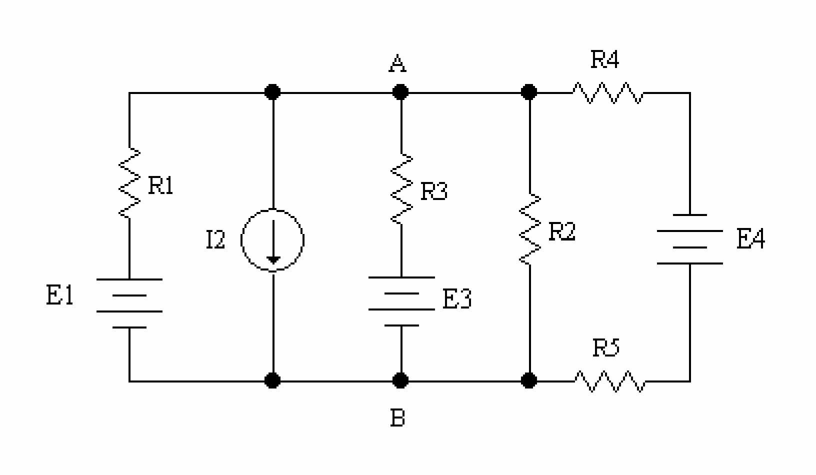
$$\Rightarrow \quad E_4 - V_{AB} = (R_4 + R_5)I_4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_4 = \frac{E_4 - V_{AB}}{R_4 + R_5} = \frac{12 - 4{,}8}{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3} = 1{,}2\text{mA}$$

2.4.2. – Esercizi da assegnare

Risolvere applicando Millman

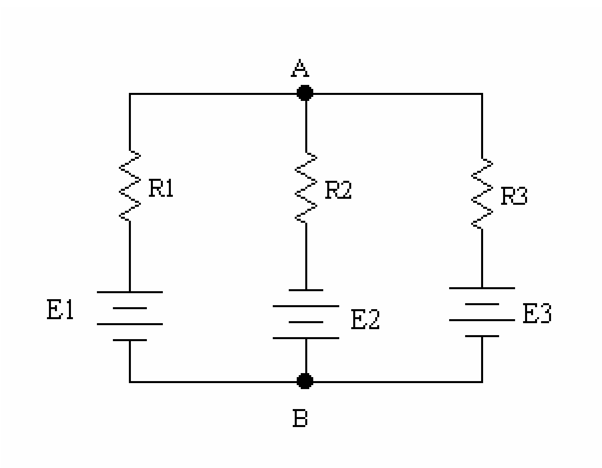
Esercizio N°1



$E_1 = 12V$; $E_3 = 8V$; $E_4 = 4V$; $I_2 = 2mA$; $R_1 = R_3 = R_4 = 2K\Omega$; $R_2 = R_5 = 4K\Omega$

Risposte $V_{AB} = 5{,}18V$; $I_1 = 3{,}41mA$; $I_{R2} = 1{,}295mA$; $I_3 = 1{,}41mA$; $I_4 = 1{,}53mA$

Esercizio N°2



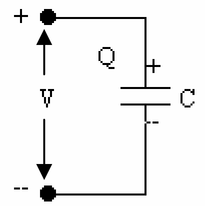
$E_1 = 8V$; $E_2 = 4V$; $E_3 = 12V$; $R_1 = R_3 = 2K\Omega$; $R_2 = 4K\Omega$

Risposte $V_{AB} = 7{,}2V$; $I_1 = 0{,}4mA$; $I_2 = 2{,}8mA$; $I_3 = 2{,}4mA$

3. - CONDENSATORI

3.1., - Generalità

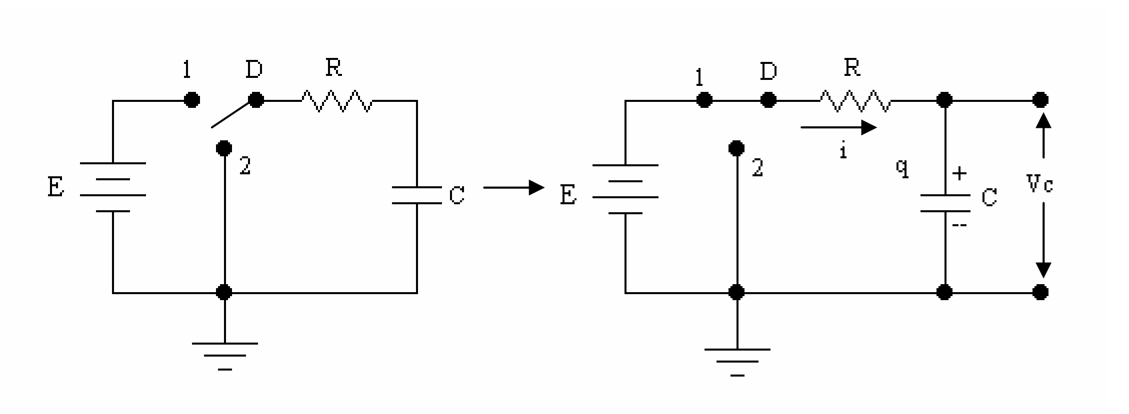
Un condensatore è, essenzialmente, costituito da due armature metalliche parallele separate da un dielettrico.
Il condensatore, sottoposto ad una differenza di potenziale, si carica immagazzinando energia sotto forma di campo elettrico.



Al variare della differenza di potenziale applicata, caria, in proporzione, la carica Q del condensatore, ma rimane costante il rapporto tra Q e V, al quale si associa il valore della capacità:

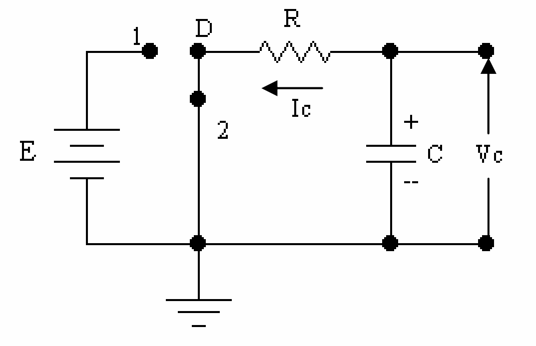
$$C = \frac{Q}{V} \quad \Rightarrow \quad Q = CV$$

che è l'equivalente della legge di Ohm per le capacità.
Attraverso le armature del condensatore non può passare corrente (sono separate da un dielettrico).
Si consideri il seguente circuito:

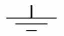


Se si collega il deviatore D nella posizione 1, si ha massima differenza di potenziale tra le armature del condensatore e i morsetti del generatore. Elettroni, spontaneamente, dall'armatura superiore del condensatore si spostano, attraversando la resistenza R, al morsetto positivo del generatore. Il generatore forza tali elettroni sul morsetto negativo e, da esso, si spostano, spontaneamente, sull'armatura inferiore del condensatore. Sull'armatura superiore del condensatore compare una carica q positiva (mancanza di elettroni) e sull'armatura inferiore una analoga carica q negativa; pertanto, tra le armature del condensatore si viene a creare una differenza di potenziale Vc. Nel circuito, poiché vi è un flusso di cariche nel tempo, vi è una corrente. Tale processo di carica continua finché, aumentando Vc, la tensione ai capi della capacità uguaglia la forza elettromotrice del generatore. La corrente, durante il processo di carica della capacità, partendo dal valore $\frac{E}{R}$ diminuisce all'aumentare della tensione Vc ai capi della capacità, fino ad annullarsi quando $V_C = E$, ossia quando la capacità ha assunto la massima carica possibile. Non essendoci più

corrente nel circuito ed essendo massima la tensione sulla capacità, essa si comporta da circuito aperto: **in corrente continua, esaurito il periodo transitorio di carica, una capacità si comporta da circuito aperto**.
Se, una volta esaurito il periodo di carica, si sposta il deviatore nella posizione 2, poiché la resistenza R collega direttamente i morsetti del condensatore, gli elettroni fluiranno, spontaneamente, dall'armatura negativa a quella positiva, originando una corrente nel circuito.



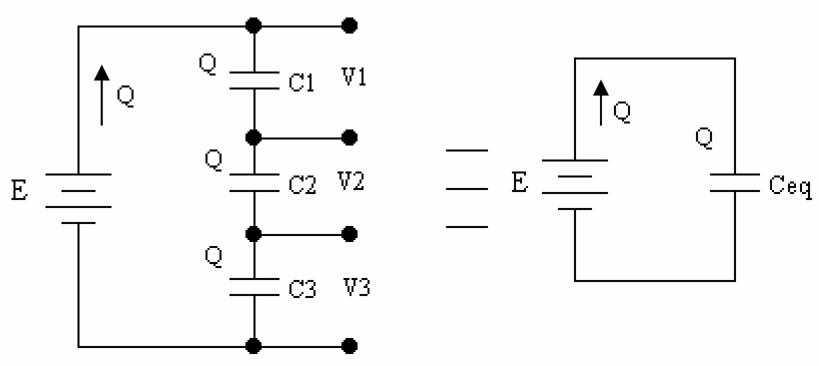
Si osservi che la corrente di carica e la corrente di scarica hanno verso opposto; se si assume come positivo il verso della corrente di carica, la corrente di carica verrà assunta come negativa (in una somma algebrica si prenderà con segno negativo).

Il simbolo  indica la massa del circuito, ossia quel punto o linea del circuito che viene presa come zero volt di riferimento.

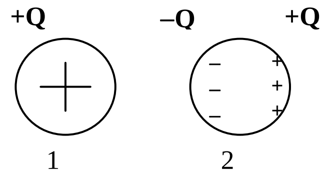
La corrente di scarica, partendo dal valore iniziale $\frac{E}{R}$, diminuisce al diminuire della differenza di potenziale Vc sulla capacità, annullandosi quando si annulla la carica sulle armature della capacità, ossia il condensatore è completamente scarico.
I periodi di tempo in cui la capacità si carica o si scarica (tempo durante il quale le tensioni e le correnti variano con legge non lineare) vengono detti transitori.
Durante il transitorio di carica il condensatore immagazzina energia, durante quello di scarica restituisce al circuito l'energia immagazzinata.

3.2. – Condensatori in serie

Due o più capacità sono in serie se stanno sullo stesso ramo.



L'unico movimento di carica può avvenire tra l'armatura superiore del condensatore C_1 e l'armatura inferiore del condensatore C_3. Il generatore erogherà una carica complessiva Q.
Il condensatore intermedio C_2 e le armature inferiore di C_1 e superiore di C_3 si caricano per induzione.
Si consideri una sfera metallica isolata caricata positivamente e si avvicina a tale sfera un'altra sfera



metallica isolata e neutra, gli elettroni di questa verranno attratti dalla carica positiva Q e migreranno verso di essa, lasciando, dalla parte opposta, un uguale accumulo di ioni positivi. Riassumendo, sulla faccia più vicina alla sfera 1 comparirà una carica $-Q$ e su quella più lontana una carica $+Q$. Sull'armatura inferiore di C_1, per induzione, affiorerà una carica $-Q$, provocando la comparsa di una carica $+Q$ sull'armatura superiore di C_2.
Sull'armatura superiore di C_3, per induzione, affiorerà una carica $+Q$, provocando la comparsa di una carica $-Q$ sull'armatura superiore di C_2. A questo punto anche C_2 risulterà carico della stessa quantità di carica Q.
Tutte le capacità della serie hanno acquisito la stessa carica Q, ma il generatore ha erogato solo la quantità Q.

Capacità in serie acquisiscono la stessa quantità di carica.

Se un condensatore acquisisce una carica Q, tra le sue armature si avrà una differenza di potenziale V e la somma delle differenze di potenziale dei condensatori deve risultare uguale ad E, tensione applicata ai capi della serie.
Le differenze di potenziale V_1, V_2 e V_3 sono:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad ; \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2} \qquad ; \qquad V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Condensatori in serie si ripartiscono la tensione applica in modo inversamente proporzionale al valore di capacità.

Il generatore, sotto la sua differenza di potenziale E, ha erogato una carica Q alla serie che vede, però, come una unica capacità di valore $C_{eq} = \frac{Q}{E}$.

Per trovare C_{eq} in funzione delle capacità della serie, si sostituiscono le espressioni $V = \frac{Q}{C}$ nell'equazione

$$E = V_1 + V_2 + V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

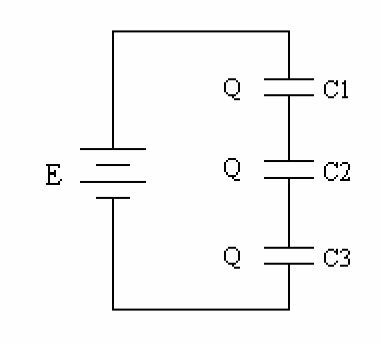
La capacità equivalente di capacità in serie è uguale all'inverso della somma degli inversi le capacità.

Se le capacità sono solo due, si ha:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

3.2.1. - Esempio

Risolvere il seguente circuito.



$$E = 10V \quad ; \quad C_1 = 3\mu F \quad ; \quad C_2 = 6\mu F \quad ; \quad C_3 = 9\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{6 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{9 \cdot 10^{-6}}} = 1{,}64\mu F$$

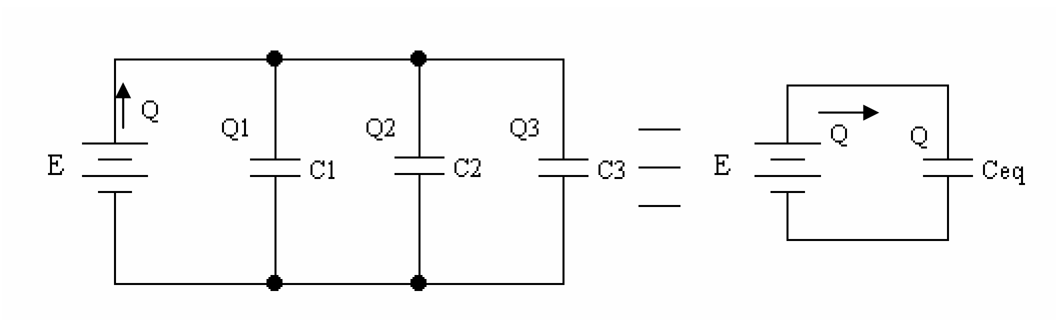
$$Q = C_{eq} E = 1{,}64 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 16{,}4\mu C \quad ; \quad V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{16{,}4 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 5{,}47V$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{16{,}4 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 2{,}73V \quad ; \quad V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{16{,}4 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6}} = 1{,}82V$$

$$E = V_1 + V_2 + V_3 = 5{,}47 + 2{,}73 + 1{,}82 = 10{,}02 \cong E$$

3.3. – Condensatori in parallelo

Due o più capacità sono in parallelo se sono collegate agli stessi nodi.



Il generatore eroga una carica Q che viene ripartita tra i condensatori, in modo tale da risultare

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \text{con} \quad Q_1 = C_1 E \quad ; \quad Q_2 = C_2 E \quad ; \quad Q_3 = C_3 E$$

Riassumendo

- Capacità in parallelo hanno ai loro capi la stessa differenza di potenziale;;

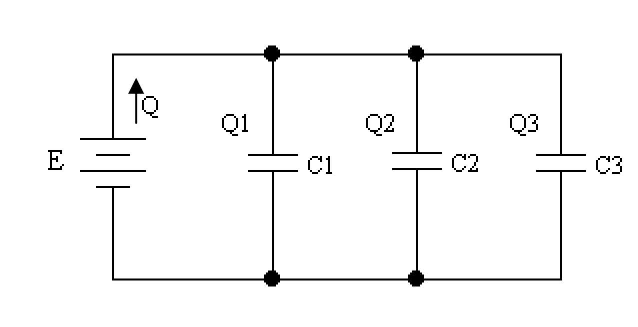
- Si ripartiscono la carica Q entrante nel parallelo in modo direttamente proporzionale al valore di capacità.

Per calcolare la capacità equivalente in funzione delle capacità del parallelo, si sostituiscono le espressioni $Q = CV$ nell'equazione

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad C_{eq} E = C_1 E + C_2 E + C_3 E \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

La capacità equivalente di due o più capacità in parallelo è uguale alla somma delle capacità.

3.3.3. - Esempio



$$E = 10V \quad ; \quad C_1 = 3\mu F$$

$$C_2 = 6\mu F \quad ; \quad C_3 = 9\mu F$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 = 3 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} + 9 \cdot 10^{-6} = 18\mu F \quad ; \quad Q_1 = C_1 E = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 30\mu C$$

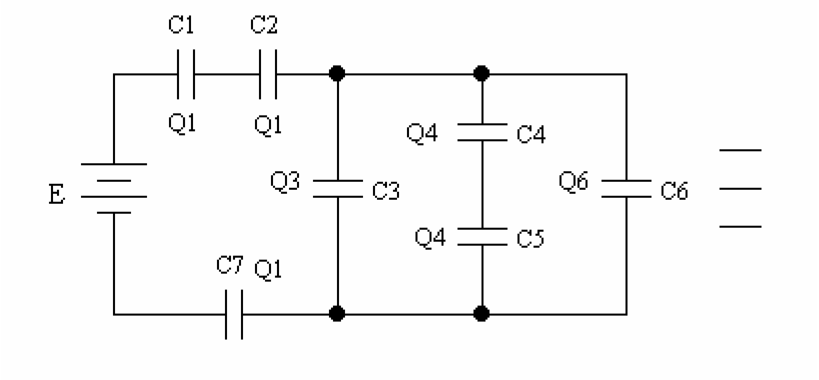
$$Q_2 = C_2 E = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 60\mu C \qquad ; \qquad Q_3 = C_3 E = 9 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 90\mu C$$

$$Q = C_{eq} E = 18 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 180\mu C \quad ; \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 30 \cdot 10^{-6} + 60 \cdot 10^{-6} + 90 \cdot 10^{-6} = 180\mu C$$

3.4. – Condensatori in collegamento misto. Metodologia risolutiva

Per risolvere un circuito con capacità in collegamento misto, si utilizza la metodologia già adoperata per la risoluzione dei circuiti resistivi. Si riduce il circuito eseguendo, di volta in volta, le serie e i paralleli e si disegnano i circuiti ridotti. Partendo dall'ultimo circuito ridotto, si calcolano tutte le cariche e le differenze di potenziale. Si passa al precedente e si calcolano le cariche e le differenze di potenziale incognite. Si passa al precedente, e così di seguito, fino al circuito iniziale.

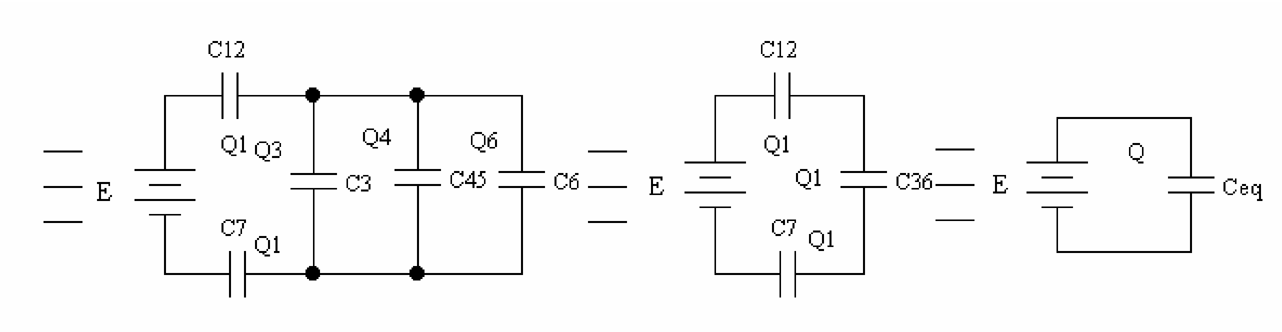
3.4.1. - Esempio



$$E = 10V$$

$$C_1 = C_3 = C_4 = C_7 = 2\mu F$$

$$C_2 = C_5 = C_6 = 6\mu F$$



$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5\mu F \quad , \quad C_{45} = \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5\mu F$$

$$C_{36} = C_3 + C_{45} + C_6 = 2 \cdot 10^{-6} + 1{,}5 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} = 9{,}5\mu F$$

$$C_{17} = \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{36}} + \frac{1}{C_7}} = \frac{1}{\frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{9{,}5 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}786\mu F$$

$$Q_1 = C_{17} E = 0{,}786 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 9{,}432\mu C \quad ; \quad V_{36} = V_3 = V_{45} = V_6 = \frac{Q_1}{C_{36}} = \frac{9{,}432 \cdot 10^{-6}}{69{,}510^{-6}} = 0{,}998V$$

$$V_7 = \frac{Q_1}{C_7} = \frac{9{,}432 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 4{,}716V \quad ; \quad Q_3 = C_3 V_3 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}998 = 1{,}996\mu C$$

$$Q_4 = C_{45} V_{45} = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}998 = 1{,}497\mu C \quad ; \quad Q_6 = C_6 V_6 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}998 = 5{,}988\mu C$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{9{,}432 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 4{,}716V \quad ; \quad V_2 = \frac{Q_1}{C_2} = \frac{9{,}432 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 1{,}572V$$

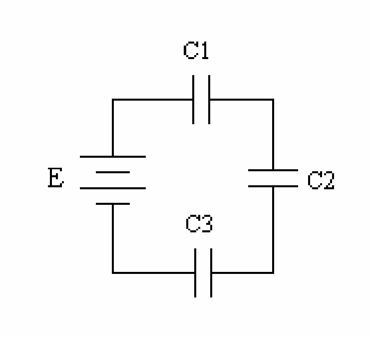
$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{1{,}497 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0{,}7485V \quad ; \quad V_5 = \frac{Q_4}{C_5} = \frac{1{,}497 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 0{,}2495V$$

$$V_1 + V_2 + V_{36} + V_7 = 4{,}716 + 1{,}572 + 0{,}998 + 4{,}716 = 12 = E$$

3.4.2. – Esercizi da assegnare

Risolvere i circuiti di figura.

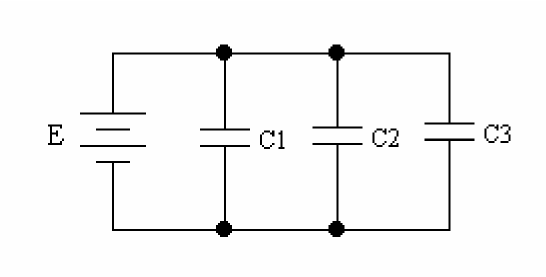
Esercizio 1



$E = 12V$; $C_1 = 20\mu F$; $C_2 = 30\mu F$; $C_3 = 40\mu F$

Risposte $C_{eq} = 9{,}23\mu F$; $Q = 110{,}77\mu C$; $V_1 = 5{,}54V$; $V_2 = 3{,}69V$; $V_3 = 2{,}77V$

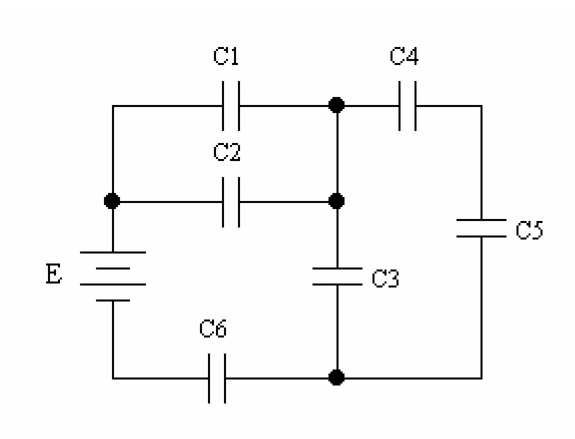
Esercizio 2



$E = 12V$; $C_1 = 20\mu F$; $C_2 = 30\mu F$; $C_3 = 40\mu F$

Risposte $C_{eq} = 90\mu F$; $Q = 1080\mu C$; $Q_1 = 240\mu C$; $Q_2 = 360\mu C$; $Q_3 = 480\mu C$

Esercizio 3



$E = 12V$; $C_1 = C_3 = C_5 = 20\mu F$

$C_2 = C_4 = C_6 = 40\mu F$

Risposte $C_{eq} = 11{,}822\mu F$; $Q = 141{,}87\mu C$; $Q_1 = 56{,}8\mu C$; $Q_2 = 85{,}2\mu C$; $Q_3 = 88{,}6\mu C$

$Q_4 = 53{,}16\mu C$; $V_1 = V_2 = 2{,}84V$; $V_3 = 4{,}43V$; $V_4 = 1{,}772V$; $V_5 = 2{,}658V$; $V_6 = 4{,}73V$

3.5. – Transitorio di carica e di scarica di una capacità

Si è già visto che, se si varia la differenza di potenziale applicata ad un circuito con una capacità, la capacità si caricherà scaricherà (in dipendenza del segno della variazione della differenza di potenziale), ossia nel circuito si avrà un transitorio.
Indicando con

- V_i = tensione iniziale della capacità (differenza di potenziale ai capi della capacità all'inizio del transitorio),

- V_f = tensione finale della capacità (differenza di potenziale ai capi della capacità alla fine del transitorio),

l'equazione che descrive matematicamente l'evoluzione del transitorio è la seguente:

$$v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (1)$$

che è un'equazione di tipo esponenziale.
$\tau = R_{eq}C$ è la costante di tempo del circuito, ossia il tempo, dall'inizio del transitorio, dopo il quale la tensione ai capi della capacità subisce una variazione del 63% della variazione massima.
L'equazione (1) può essere scritta evidenziando la variazione che deve subire la tensione sulla capacità. Indicando con $\Delta V_C = V_f - V_i$ la variazione di tensione sulla capacità, dalla (1) si ha:

$$v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_f - (V_f - V_i)e^{-\frac{t}{\tau}} = V_f - \Delta V_C e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'esponenziale negativo $\left(e^{-t}\right)$ è tale che all'aumentare del tempo diminuisce il suo valore, tendendo a zero per t tendente all'infinito. Al passare del tempo, la quantità che viene sottratta alla tensione finale V_f, partendo dal valore V_f, diventa sempre più piccola, fino ad annullarsi, momento in cui termina il transitorio.
Si calcola $v_c(t)$ dopo un tempo pari a τ:

$$\begin{cases} t = \tau \\ v_c(\tau) = V_f - \Delta V_C e^{-\frac{\tau}{\tau}} = V_f - \Delta V_C \cdot 0{,}37 \end{cases}$$

La variazione della tensione ai capi della capacità si calcola sottraendo al valore calcolato il calore di tensione iniziale:

$$v_c(\tau) - V_i = V_f - \Delta V_C \cdot 0{,}37 - V_i = \Delta V_C - \Delta V_C \cdot 0{,}37 = 0{,}63 \cdot \Delta V_C$$

Nel tempo pari ad un τ la tensione ai capi della capacità varia del 63% della variazione massima ΔV_C.
R_{eq} è la resistenza equivalente attraverso cui si carica o si scarica la capacità, ossia è la resistenza vista dalla capacità una volta eliminati i generatori indipendenti (si calcola nello stesso modo della resistenza equivalente dei teoremi di Thèvenin e di Norton).

3.5.1. – Durata del transitorio

Poiché l'esponenziale, e quindi la variazione residua della tensione sulla capacità, arriva a zero in un tempo infinito, è necessario stabilire un criterio per poter considerare esaurito il transitorio in un tempo finito. Si può stabilire che il transitorio sia terminato quando la variazione della tensione ai capi della capacità ha superato il 99% della variazione massima ΔV_C, ossia la variazione residua sia al di sotto dell'1%:

$$\Delta V_C - 99\% V = V(1 - 0{,}99) = 0{,}01 \Delta V_C = 1\% \Delta V_C$$

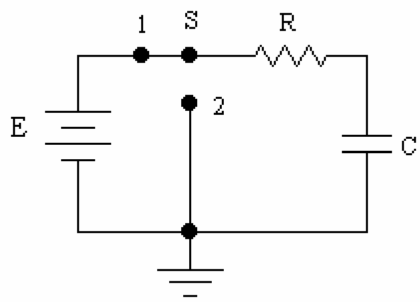
Si determina tale tempo imponendo che per $t = t_C$ si ha:

$$\Delta V_C e^{-\frac{t_c}{\tau}} = 0{,}01 \Delta V_C \;\Rightarrow\; e^{-\frac{t_c}{\tau}} = 0{,}01 \;\Rightarrow\; -\frac{t_c}{\tau} = \ln 0{,}01 \;\Rightarrow\; t_c = -\tau \ln 00{,}1 = -\tau(-4{,}6) = 4{,}6\tau$$

In un tempo $t_C > 4{,}6\tau$ la tensione ai capi della capacità supera il 99% della variazione massima.
Si è assunto $t_C = 5\tau$ come tempo dopo il quale considerare esaurito il transitorio.

3.5.2. – Calcolo dell'equazione $v_c(t)$ in alcuni casi

Si consideri il circuito di figura.



Supponendo la capacità inizialmente scarica e spostando il deviatore S nella posizione 1, si fa subire al circuito una variazione di tensione pari ad E. Si calcolano V_i e V_f, assumendo come istante iniziale $t = 0$:

$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = 0 \quad \text{(capacità scarica)} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 5\tau \quad \text{(esaurito transitorio)} \\ V_f = E \end{cases}$$

La tensione iniziale è il valore di tensione ai capi della capacità all'inizio del transitorio.
Per calcolare il valore finale V_f è sufficiente considerare la capacità un circuito aperto e calcolare la differenza di potenziale ai capi della capacità.
Si scrive l'equazione di carica:

$$v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{dove } \tau = RC$$

In un τ si ha: $$v_c(\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-1}\right) = E(1 - 0{,}37) = 0{,}63E = 63\%E$$

nel tempo $t = \tau$ la tensione sulla capacità arriva allo 0,63E = 63%E.
si calcola $v_c(t)$ per $t = 2\tau;\ 3\tau;\ 4\tau;\ 5\tau$:

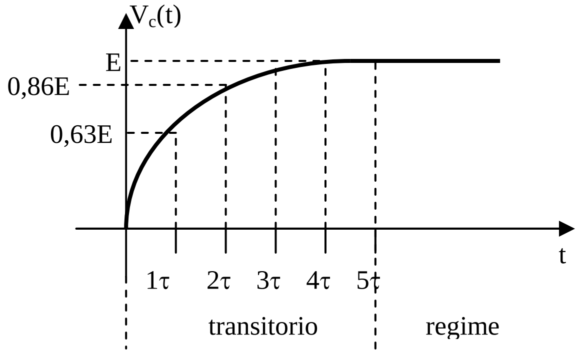
$$v_c(2\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-2}\right) = E(1 - 0{,}135) = 0{,}86E = 86\%$$

$$v_c(3\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-3}\right) = E(1 - 0{,}05) = 0{,}95E = 95\%E$$

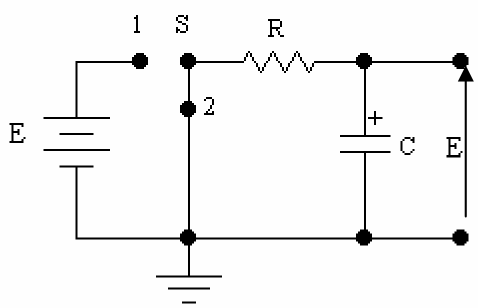
$$v_c(4\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-4}\right) = E(1 - 0{,}018) = 0{,}98E = 98\%E$$

$$v_c(5\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-5}\right) = E(1 - 0{,}007) = 0{,}993E = 99{,}3\%E$$

Come si nota dai valori calcolati, la tensione $v_c(t)$ ai capi della capacità varia velocemente all'inizio del transitorio nel primo τ per rallentare e variare del 37% ΔV_C nei rimanenti 4τ. Il grafico dell'equazione di carica è il seguente:



Se, esaurito il transitorio di carica, si sposta il deviatore S nella posizione 2, si fa subire al circuito una variazione di tensione –E e inizia un transitorio di scarica.



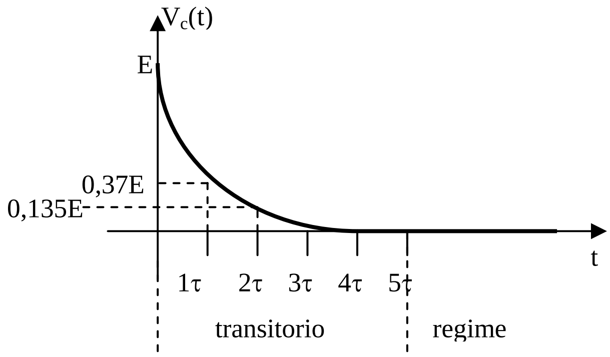
Si calcolano V_i e V_f, assumendo come istante iniziale $t = 0$:

$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = E \quad \text{(capacità carica)} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 5\tau \quad \text{(esaurito transitorio)} \\ V_f = 0 \quad \text{(capacità scarica)} \end{cases}$$

Si scrive l'equazione di scarica:

$$v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{dove } \tau = RC$$

Il grafico dell'equazione di carica è il seguente:

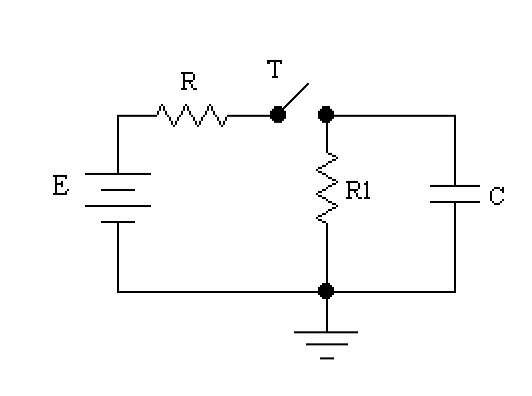


$$v_c(\tau) = Ee^{-\frac{\tau}{\tau}} = Ee^{-1} = 0{,}37E = 37\%E \quad , \quad v_c(2\tau) = Ee^{-\frac{2\tau}{\tau}} = Ee^{-2} = 0{,}135E = 13{,}5\%E$$

$$v_c(3\tau) = Ee^{-\frac{3\tau}{\tau}} = Ee^{-3} = 0{,}05E = 5\%E \quad , \quad v_c(4\tau) = Ee^{-\frac{4\tau}{\tau}} = Ee^{-4} = 0{,}018E = 1{,}8\%E$$

$$v_c(5\tau) = Ee^{-\frac{5\tau}{\tau}} = Ee^{-5} = 0{,}007E = 0{,}7\%E$$

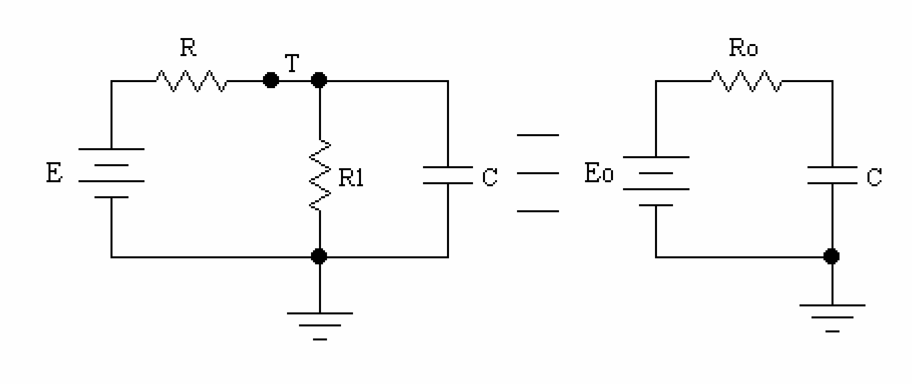
3.5.2. – Esempio 1



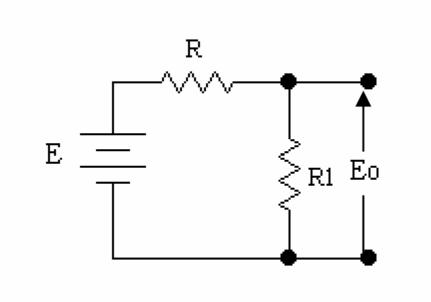
$$E = 12V \quad ; \quad R = 2K\Omega$$

$$R_1 = 6K\Omega \quad ; \quad C = 10\mu F$$

Supponendo la capacità inizialmente scarica, si chiude il tasto T. Si applica il teorema di Thèvenin ai capi della capacità e si riduce il circuito, visto dalla capacità, ad un generatore di tensione.

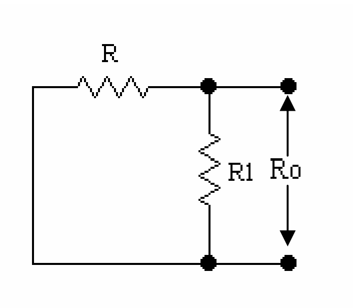


Calcolo di E_o



$$E_o = \frac{R_1}{R+R_1}E = \frac{6\cdot 10^3}{2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3}\cdot 12 = 9V$$

Calcolo di R_o



$$R_o = \frac{R\cdot R_1}{R+R_1} = \frac{2\cdot 10^3 \cdot 6\cdot 10^3}{2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3} = 1{,}5K\Omega$$

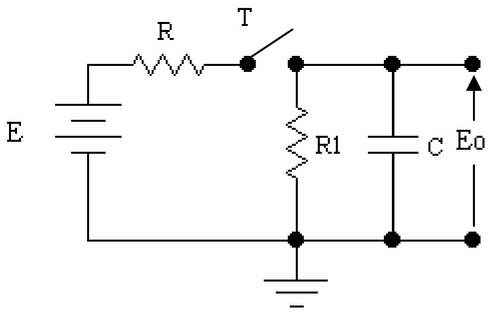
Equazione di carica

$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} t = 5\tau_C \\ V_f = E_o = 9V \end{cases} ; \quad v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = E_o - E_o e^{-\frac{t}{\tau_C}} = E_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

dove $\tau_C = R_{eq}C = R_oC = (R // R_1)C = 1{,}5\cdot 10^3 \cdot 10\cdot 10^{-6} = 15ms$.
Sostituendo i valori, si ha:

$$v_c(t) = 9\left(1 - e^{-\frac{t}{15\cdot 10^{-3}}}\right) = 9\left(1 - e^{-66{,}67t}\right)V$$

Una volta esaurito il transitorio, ossia quando $v_c = E_o = 9V$, si apre l'interruttore T. Inizia un transitorio di scarica.



La capacità, dal valore E_o, si scarica, attraverso la resistenza R, fino a zero.

$$\begin{cases} t = 0 \\ V_i = E_o = 9V \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} t = 5\tau_S \\ V_f = 0 \end{cases} \quad ; \quad v_c(t) = V_f + (V_i - V_f)e^{-\frac{t}{\tau}} = E_o e^{-\frac{t}{\tau_S}}$$

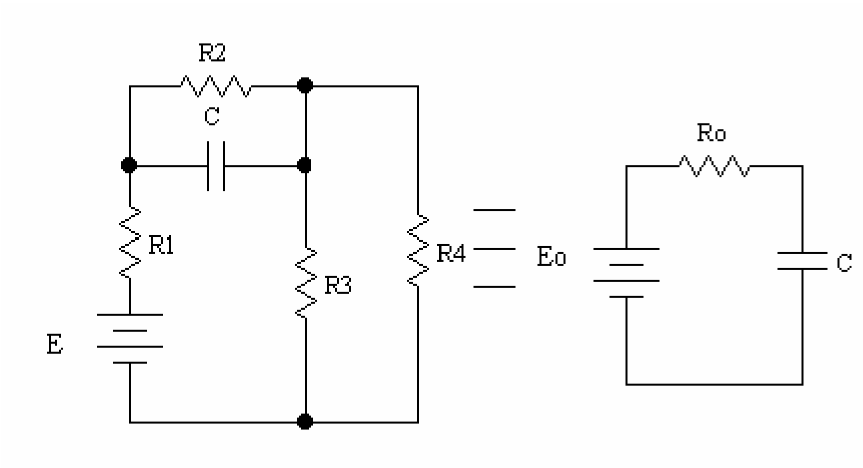
dove $\tau_S = R_{eq}C = R_1C = 6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 60ms$.

Sostituendo i valori, si ha: $v_c(t) = 9e^{-\frac{t}{60 \cdot 10^{-3}}} = 9e^{-16,67t}V$

3.5.3. – Esempio 2

Dopo avere ridotto il circuito applicando il teorema di Thèvenin ai capi del condensatore, calcolare:

1. la tensione ai capi del condensatore, esauriti i transitori.
2. La costante di tempo τ del circuito.
3. Il tempo minimo dopo il quale si può considerare esaurito il transitorio.
4. Disegnare il grafico, nel piano V-t, della curva di carica V_C del condensatore in funzione del tempo.
5. Calcolare la differenza di potenziale e la corrente per ogni resistenza.
6. Si inserisce nel circuito un voltmetro per misurare la differenza di potenziale a regime (esauriti i transitori) ai capi del condensatore. Considerando il voltmetro reale, esso è schematizzabile come un voltmetro ideale con in serie una resistenza R_{iv} che rappresenta la resistenza interna del voltmetro. Inserisce lo strumento, equivale ad inserire nel circuito una resistenza addizionale, per cui la tensione misurata non coincide esattamente con quella calcolata senza inserire il voltmetro. Utilizzando il valore fornito per R_{iv}, calcolare il valore che si leggerà sul voltmetro.

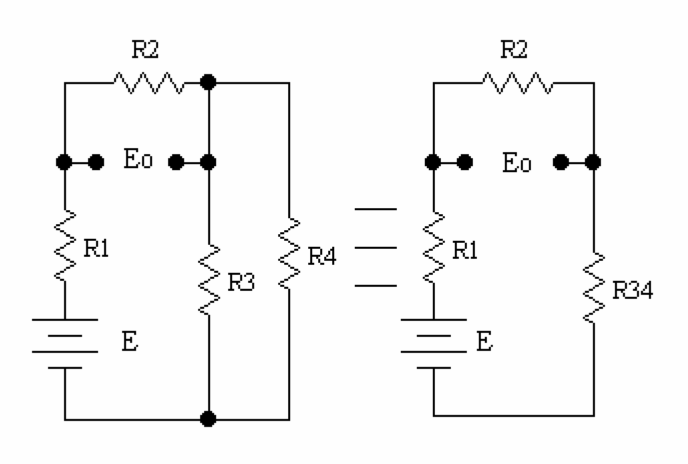


$$E = 10V \quad ; \quad C = 10\mu F$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 2K\Omega$$

$$R_4 = 3K\Omega$$

<u>Calcolo di Eo</u>

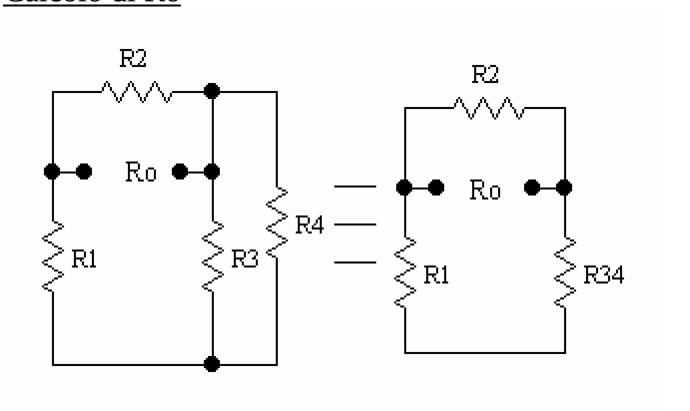


$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = 1{,}2K\Omega$$

$$E_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_{34}} E =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3} \cdot 10 = 3{,}846V$$

<u>Calcolo di Ro</u>

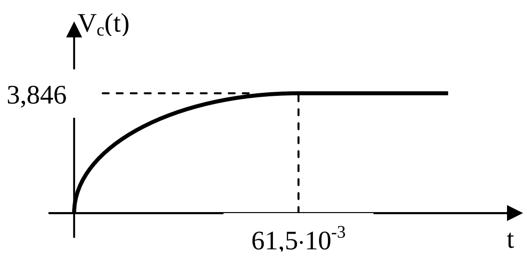


$$R_o = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_{34})}{R_2 + R_1 + R_{34}} =$$

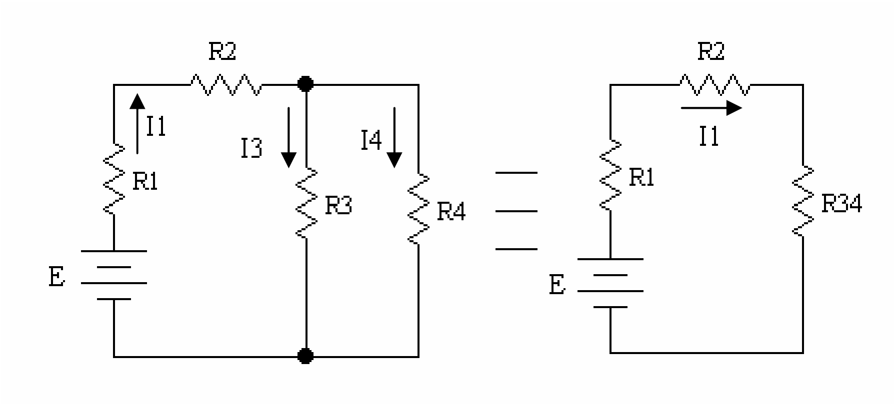
$$= \frac{2 \cdot 10^3 \cdot \left(2 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3\right)}{2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3} = 1{,}23K\Omega$$

$$V_{Cf} = E_o = 3{,}846V \qquad ; \qquad \tau = R_o C = 1{,}23 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 12{,}3ms$$

$$\Delta t_C = 5\tau = 5 \cdot 12{,}3 \cdot 10^{-3} = 61{,}5ms$$



Esaurito il transitorio, la capacità equivale ad un circuito aperto. Per calcolare, in tale caso, le tensioni e le correnti nelle resistenze, si ridisegna il circuito omettendo la capacità C.



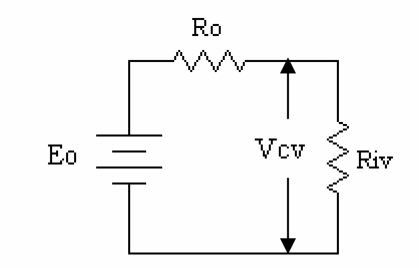
$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_{34}} = \frac{10}{2\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3 + 1{,}2\cdot 10^3} = 1{,}923\text{mA}$$

$$V_1 = R_1 \cdot I_1 = 2\cdot 10^3 \cdot 1{,}923\cdot 10^{-3} = 3{,}846\text{V} \quad ; \quad V_2 = R_2 \cdot I_1 = 2\cdot 10^3 \cdot 1{,}923\cdot 10^{-3} = 3{,}846\text{V}$$

$$V_{34} = V_3 = V_4 = R_{34} \cdot I_1 = 1{,}2\cdot 10^3 \cdot 1{,}923\cdot 10^{-3} = 2{,}31\text{V}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{2{,}31}{2\cdot 10^3} = 1{,}155\text{mA} \quad ; \quad I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{2{,}31}{4\cdot 10^3} = 0{,}77\text{mA}$$

Inserire un voltmetro, con resistenza interna $R_{iv} = 100\text{K}\Omega$, ai capi della capacità C equivale ad inserire nel circuito una resistenza R_{iv}, che altera i valori di tensione e di corrente dell'intero circuito, e, quindi, anche il valore di tensione sulla capacità.
Al fine di calcolare il valore letto sul voltmetro, si ridisegna il circuito mettendo al posto della capacità C la resistenza R_{iv} e calcolando la caduta di tensione su di essa. Analogamente, per tale scopo si può utilizzare il circuito equivalente calcolato con Thèvenin, mettendo al posto della capacità (circuito aperto) la resistenza R_{iv}.



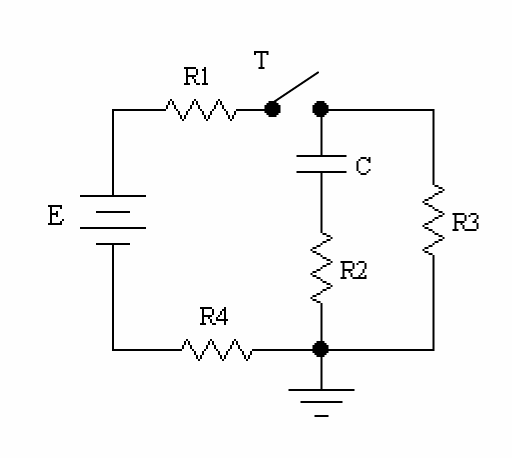
$$V_{CV} = \frac{R_{iv}}{R_o + R_{iv}} E_o == \frac{100\cdot 10^3}{1{,}23\cdot 10^3 + 100\cdot 10^3} \cdot 3{,}846 = 3{,}799\text{V}$$

Il valore misurato risulta leggermente più piccolo del valore reale.

3.5.4. – Esercizi da assegnare

<u>Esercizio 1</u>

Del circuito di figura calcolare l'equazione di carica della capacità, supponendola inizialmente scarica, allorché viene chiuso il tasto T. Dopo un tempo superiore a $5\tau_C$ (τ_C è la costante di carica della capacità) si riapre il tasto T; calcolare l'equazione di scarica della capacità.



$$E = 10V \quad ; \quad C = 10\mu F$$

$$R_1 = R_2 = 2K\Omega$$

$$R_3 = R_4 = 4K\Omega$$

Risposte tasto chiuso $v_c(t) = 4\left(1 - e^{-22,73t}\right)V$; tasto riaperto $v_c(t) = \left(4e^{-16,67t}\right)V$

Esercizio 2

Dopo avere ridotto il circuito applicando il teorema di Thèvenin ai capi del condensatore, calcolare:

1. la tensione ai capi del condensatore, esauriti i transitori.

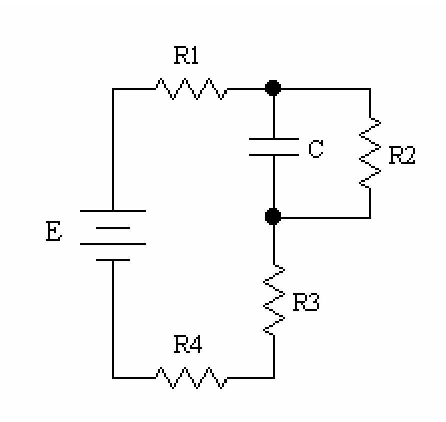
2. La costante di tempo τ del circuito.

3. Il tempo minimo dopo il quale si può considerare esaurito il transitorio.

4. Disegnare il grafico, nel piano V-t, della curva di carica V_C del condensatore in funzione del tempo.

5. Calcolare la differenza di potenziale e la corrente per ogni resistenza.

6. Si inserisce nel circuito un voltmetro per misurare la differenza di potenziale a regime (esauriti i transitori) ai capi del condensatore. Considerando il voltmetro reale, esso è schematizzabile come un voltmetro ideale con in serie una resistenza R_{iv} che rappresenta la resistenza interna del voltmetro. Inserisce lo strumento, equivale ad inserire nel circuito una resistenza addizionale, per cui la tensione misurata non coincide esattamente con quella calcolata senza inserire il voltmetro. Utilizzando il valore fornito per R_{iv}, calcolare il valore che si leggerà sul voltmetro.



$E = 10V \;\; ; \;\; C = 10\mu F$

$R_1 = R_2 = 2K\Omega$

$R_3 = R_4 = 4K\Omega$

Risposte $V_{Cf} = 1{,}67V \; ; \; \tau = 16{,}7ms \; ; \; \Delta t_C = 83{,}33ms$

$I = 0{,}833mA \; ; \; V_1 = V_2 = 1{,}67V \; ; \; V_3 = V_4 = 3{,}33V \; ; \; V_{CV} = 1{,}642V$

INDICE