

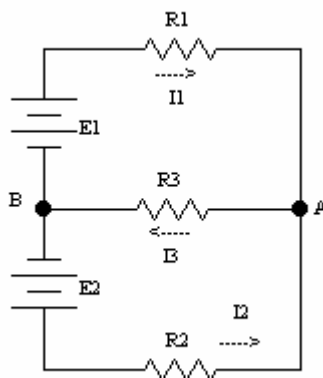
VERIFICA DEI PRINCIPI DI KIRCHHOFF, DEL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, DEL TEOREMA DI MILLMAN

Un qualunque circuito lineare (in cui agiscono più generatori) può essere risolto applicando i due principi di Kirchhoff e risolvendo le r (numero dei rami del circuito = numero delle correnti incognite) equazioni linearmente indipendenti che si ottengono.

È anche possibile risolvere un circuito lineare, in cui agiscono più cause (generatori), applicando il Principio di Sovrapposizione degli Effetti. Tale principio è, in genere, conveniente quando le cause che agiscono sono di natura diversa (generatori continui e generatori alternati).

Se, poi, nel circuito è possibile determinare due punti rispetto ai quali tutti i rami sono in parallelo, è possibile applicare il teorema di Millman per determinare la differenza di potenziale tra questi due punti. Calcolata tale differenza di potenziale, si determinano le correnti nei rami e le cadute di tensione sulle resistenze.

Un semplice circuito che si presta alla risoluzione nei tre modi su citati è quello di figura.



$$E_1 = 8V; \quad E_2 = 10V; \quad R_1 = 3,3k\Omega; \quad R_2 = 4,7k\Omega; \quad R_3 = 2,2k\Omega$$

I valori dei generatori, essendo veri e propri generatori e non delle schematizzazioni di elementi non lineari o altro, devono essere scelti in modo che, in nessun caso, la corrente debba entrare nel morsetto positivo. Un generatore o un alimentatore è costruito in modo da erogare la corrente e non da assorbirla. Se dovesse verificarsi ciò il circuito non si comporterà come previsto.

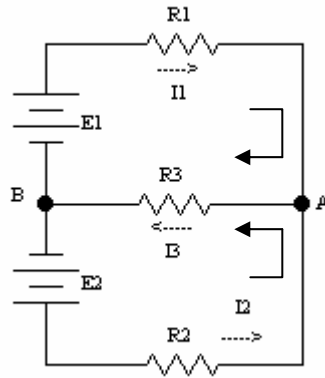
Nel caso del circuito di figura le cose torneranno anche sperimentalmente, in quanto le correnti hanno proprio il verso riportato nella figura.

Risoluzione del circuito nei tre modi

Risoluzione con i Principi di Kirchhoff

- Vi sono tre rami ($r = 3$), e, quindi, tre correnti incognite.
- Vi sono due nodi e, quindi, $N - 1 = 2 - 1 = 1$ nodi indipendenti.
- Vi sono $m = r - (N - 1) = 3 - 1 = 2$ maglie indipendenti.

Si possono scrivere tre equazioni linearmente indipendenti, una ai nodi e due alle maglie.



Scelti i versi di percorrenza di figura e il nodo A, si ha:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_3 - I_2 \\ R_1 I_3 - R_1 I_2 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_1 I_2 + (R_1 + R_3) I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori e tralasciando la prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} -3,3 \cdot 10^3 \cdot I_2 + 5,5 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 8 \\ 4,7 \cdot 10^3 \cdot I_2 + 2,2 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15,51 \cdot 10^3 \cdot I_2 + 25,85 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 37,6 \\ 15,51 \cdot 10^3 \cdot I_2 + 7,26 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 33 \end{cases}$$

$$33,11 \cdot 10^3 \cdot I_3 = 70,6$$

$$I_3 = \frac{70,6}{33,11 \cdot 10^3} = 2,132 \text{mA} \quad I_2 = \frac{10 - 2,2 \cdot 10^3 \cdot I_3}{4,7 \cdot 10^3} = \frac{10 - 2,2 \cdot 10^3 \cdot 2,132 \cdot 10^{-3}}{4,7 \cdot 10^3} = 1,130 \text{mA}$$

$$I_1 = I_3 - I_2 = 2,132 \cdot 10^{-3} - 1,130 \cdot 10^{-3} = 1,002 \text{mA}$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 3,3 \cdot 10^3 \cdot 1,002 \cdot 10^{-3} = 3,307 \text{V} \quad V_2 = R_2 I_2 = 4,7 \cdot 10^3 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3} = 5,311 \text{V}$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 2,2 \cdot 10^3 \cdot 2,132 \cdot 10^{-3} = 4,69 \text{V}$$

Risoluzione con Millman

Si calcolano le correnti di cortocircuito dei rami con i generatori e l'inverso della somma degli inversi delle resistenze:

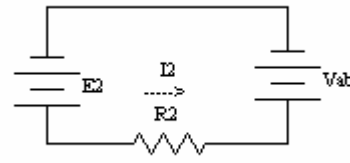
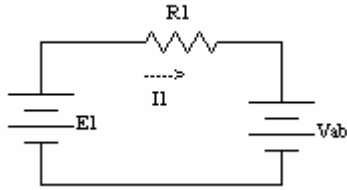
$$I_{CC1} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{8}{3,3 \cdot 10^3} = 2,424 \text{mA} \quad I_{CC2} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{10}{4,7 \cdot 10^3} = 2,128 \text{mA}$$

$$R_o = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3,3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4,7 \cdot 10^3} + \frac{1}{2,2 \cdot 10^3}} = 1,03 \text{k}\Omega$$

Si calcola la differenza di potenziale tra i punti A e B.

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{8}{3,3 \cdot 10^3} + \frac{10}{4,7 \cdot 10^3}}{\frac{1}{3,3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4,7 \cdot 10^3} + \frac{1}{2,2 \cdot 10^3}} = 4,691V = V_3$$

Si calcolano le correnti, schematizzando la differenza di potenziale V_{AB} con un generatore di tensione, e le differenze di potenziale.



$$I_1 = \frac{E_1 - V_{AB}}{R_1} = \frac{8 - 4,691}{3,3 \cdot 10^3} = 1,003\text{mA}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - V_{AB}}{R_2} = \frac{10 - 4,691}{4,7 \cdot 10^3} = 1,130\text{mA}$$

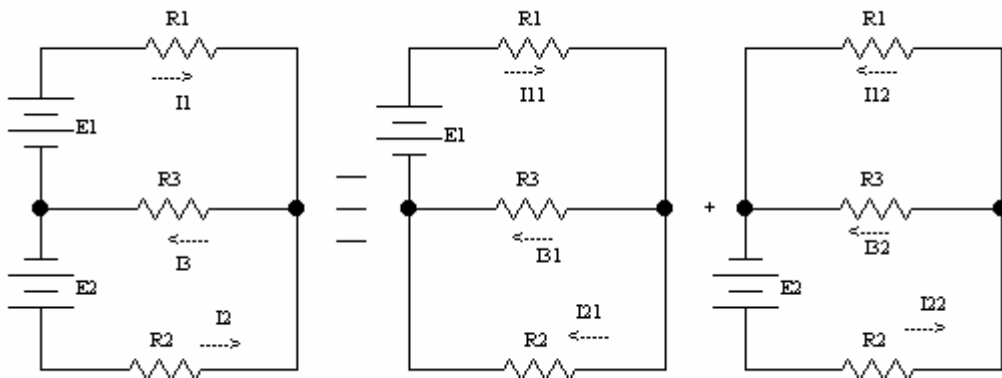
$$I_2 = \frac{E_2 - V_{AB}}{R_2} = \frac{10 - 4,691}{4,7 \cdot 10^3} = 1,130\text{mA}$$

$$V_1 = R_1 I_1 = 3,3 \cdot 10^3 \cdot 1,003 \cdot 10^{-3} = 3,31V$$

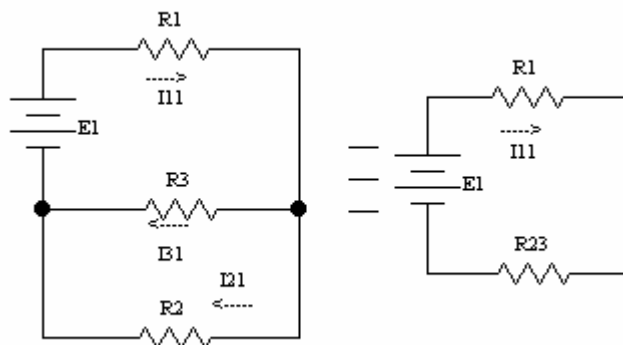
$$V_2 = R_2 I_2 = 4,7 \cdot 10^3 \cdot 1,13 \cdot 10^{-3} = 5,311V$$

Risoluzione col Principio di Sovrapposizione degli Effetti

Il circuito risulta equivalente alla sovrapposizioni di due circuiti in cui agisce una causa per volta, come schematizzato in figura. Le correnti e le tensioni si ottengono sommando algebricamente le correnti e le tensioni dei due circuiti. Si sommano se i loro versi sono concordi; si sottraggono se sono discordi, assumendo il verso di quella di valore maggiore.



Risoluzione primo circuito, agisce solo E_1 .

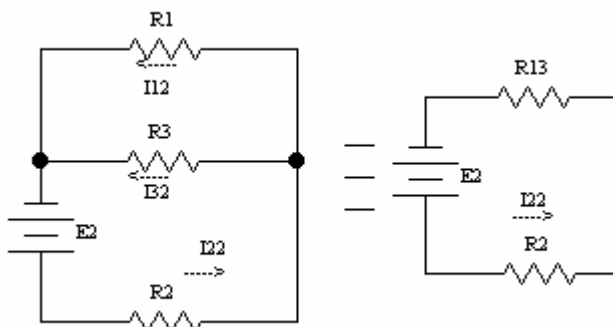


$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4,7 \cdot 10^3 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{4,7 \cdot 10^3 + 2,2 \cdot 10^3} = 1,499 \text{ k}\Omega \quad I_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}} = \frac{8}{3,3 \cdot 10^3 + 1,499 \cdot 10^3} = 1,667 \text{ mA}$$

$$V_{11} = R_1 I_{11} = 3,3 \cdot 10^3 \cdot 1,667 \cdot 10^{-3} = 5,501 \text{ V} \quad V_{21} = V_{31} = R_{23} I_{11} = 1,499 \cdot 10^3 \cdot 1,667 \cdot 10^{-3} = 2,5 \text{ V}$$

$$I_{21} = \frac{V_{21}}{R_2} = \frac{2,5}{4,7 \cdot 10^3} = 0,532 \text{ mA} \quad I_{31} = \frac{V_{31}}{R_3} = \frac{2,5}{2,2 \cdot 10^3} = 1,136 \text{ mA}$$

Risoluzione secondo circuito, agisce solo E_2 .



$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{3,3 \cdot 10^3 \cdot 2,2 \cdot 10^3}{3,3 \cdot 10^3 + 2,2 \cdot 10^3} = 1,32 \text{ k}\Omega \quad I_{22} = \frac{E_2}{R_2 + R_{13}} = \frac{10}{4,7 \cdot 10^3 + 1,32 \cdot 10^3} = 1,661 \text{ mA}$$

$$V_{22} = R_2 I_{22} = 4,7 \cdot 10^3 \cdot 1,661 \cdot 10^{-3} = 7,81 \text{ V} \quad V_{12} = V_{32} = R_{13} I_{22} = 1,32 \cdot 10^3 \cdot 1,661 \cdot 10^{-3} = 2,193 \text{ V}$$

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{R_1} = \frac{2,193}{3,3 \cdot 10^3} = 0,665 \text{ mA} \quad I_{32} = \frac{V_{32}}{R_3} = \frac{2,193}{2,2 \cdot 10^3} = 0,997 \text{ mA}$$

Si calcolano le tensioni e le correnti.

$$V_1 = V_{11} - V_{12} = 5,501 - 2,193 = 3,308 \text{ V} \quad V_2 = V_{22} - V_{21} = 7,81 - 2,5 = 5,31 \text{ V}$$

$$V_3 = V_{31} + V_{32} = 2,5 + 2,193 = 4,693 \text{ V} \quad I_1 = I_{11} - I_{12} = 1,667 \cdot 10^{-3} - 0,665 \cdot 10^{-3} = 1,002 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_{22} - I_{21} = 1,661 \cdot 10^{-3} - 0,532 \cdot 10^{-3} = 1,129 \text{mA}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 1,136 \cdot 10^{-3} + 0,997 \cdot 10^{-3} = 2,133 \text{mA}$$

Procedimento di verifica dei Principi di Kirchhoff

1. Si monta il circuito e si collegano i generatori, uno regolato a 8V e l'altro regolato a 10V.
2. Si misurano le tensioni V_1 , V_2 , V_3 .
3. Utilizzando i valori di tensione misurati, applicando la legge di Ohm ai capi delle resistenze, si determinano i valori delle correnti I_1 , I_2 , I_3 .
4. Si verifica il primo Principio di Kirchhoff: la somma delle correnti I_1 e I_2 deve essere uguale alla corrente I_3 .
5. Si verifica il secondo Principio di Kirchhoff: la somma delle tensioni V_1 e V_3 deve essere uguale alla tensione del generatore E_1 ; la somma delle tensioni V_2 e V_3 deve essere uguale alla tensione del generatore E_2 .
6. Si riportano i valori in una tabella in cui sono riportati anche i valori calcolati, per un immediato confronto.

	volt			mA				volt	
	V_1	V_2	V_3	I_1	I_2	I_3	$I_1 + I_2 = I_3$	$E_1 = V_1 + V_3$	$E_2 = V_2 + V_3$
Valori misurati	3,30	5,293	4,734	1,00	1,126	2,150	2,126	8,034	10,027
Valori calcolati	3,307	5,311	4,690	1,002	1,131	2,132	2,132	7,997	10,001

Procedimento di verifica del teorema di Millman

7. Si misura la differenza di potenziale V_{AB} .
8. Si cortocircuita il ramo con E_1 e si misura la corrente di cortocircuito I_{CC1} .
9. Si cortocircuita il ramo con E_2 e si misura la corrente di cortocircuito I_{CC2} .
10. Si sostituiscono i generatori E_1 e E_2 con due cortocircuiti e si misura la resistenza R_o vista tra i punti A e B. Dall'inverso del valore misurato di R_o si ottiene la somma delle conduttanze di tutti i rami.

11. Si verifica, utilizzando i valori rilevati, che
$$V_{AB} = \frac{I_{CC1} + I_{CC2}}{\frac{1}{R_o}}$$

12. Si riportano i valori in una tabella in cui sono riportati anche i valori calcolati, per un immediato confronto.

	volt	mA		k Ω	mS	$V_{AB} = (I_{CC1} + I_{CC2}) / \frac{1}{R_o}$
	$V_{AB} = V_3$	I_{CC1}	I_{CC2}	R_o	$1/R_o$	
Valori misurati	4,737	2,414	2,114	1,032	0,969	4,664
Valori calcolati	4,691	2,424	2,128	1,03	0,970	4,69

Procedimento di verifica del Principio di Sovrapposizione degli Effetti

13. Si scollega il generatore E_2 e lo si sostituisce con un cortocircuito.
14. Si misurano le tensioni V_{11} , V_{21} , V_{31} .
15. Utilizzando i valori di tensione misurati, applicando la legge di Ohm ai capi delle resistenze, si determinano i valori delle correnti I_{11} , I_{21} , I_{31} .
16. Si scollega il generatore E_1 e lo si sostituisce con un cortocircuito.

17. Si misurano le tensioni V_{12} , V_{22} , V_{32} .
18. Utilizzando i valori di tensione misurati, applicando la legge di Ohm ai capi delle resistenze, si determinano i valori delle correnti I_{12} , I_{22} , I_{32} .
19. Si verifica che: $V_1 = V_{11} - V_{12}$; $V_2 = V_{22} - V_{21}$; $V_3 = V_{31} + V_{32}$; $I_1 = I_{11} - I_{12}$; $I_2 = I_{22} - I_{21}$; $I_3 = I_{31} + I_{32}$. Se il verso delle tensioni e delle correnti dei contributi sono concordi si sommano, se sono discordi si sottraggono; il verso coincide con quello di valore maggiore.
20. Si riportano i valori in una tabella in cui sono riportati anche i valori calcolati, per un immediato confronto.

	volt			mA			volt			mA		
	V_{11}	V_{21}	V_{31}	I_{11}	I_{21}	I_{31}	V_{12}	V_{22}	V_{32}	I_{12}	I_{22}	I_{32}
Valori misurati	5,505	2,5	2,5	1,668	0,532	1,136	2,227	7,81	2,227	0,675	1,662	1,012
Valori calcolati	5,501	2,5	2,5	1,667	0,532	1,136	2,193	7,81	2,193	0,665	1,661	0,997

	volt			mA		
	$V_1 = V_{11} - V_{12}$	$V_2 = V_{22} - V_{21}$	$V_3 = V_{31} + V_{32}$	$I_1 = I_{11} - I_{12}$	$I_2 = I_{22} - I_{21}$	$I_3 = I_{31} + I_{32}$
Valori misurati	3,278	5,31	4,727	0,994	1,130	2,148
Valori calcolati	3,308	5,31	4,693	1,002	1,129	2,133

In tutti i casi i valori sperimentali ben si adattano ai valori teorici calcolati.