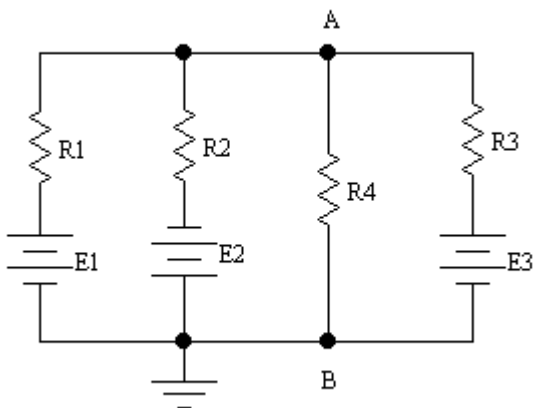


Supervisore Prof. **Giancarlo Fionda**  
 Insegnante di Elettronica

### VERIFICA DEL TEOREMA DI MILLMAN E DELLA LEGGE DI OHM GENERALIZZATA AI TRONCHI

Si verifica un circuito costituito da rami in parallelo con più generatori. Si misurano le cadute di tensione su ogni resistenza, e da esse le correnti, e si confrontano i valori ottenuti con quelli calcolati applicando al circuito i principi di Kirchhoff e con quelli calcolati applicando il teorema di Millman e la legge di Ohm generalizzata ai tronchi (rami). I valori sperimentali devono risultare molto prossimi a quelli teorici.

#### Circuito da verificare



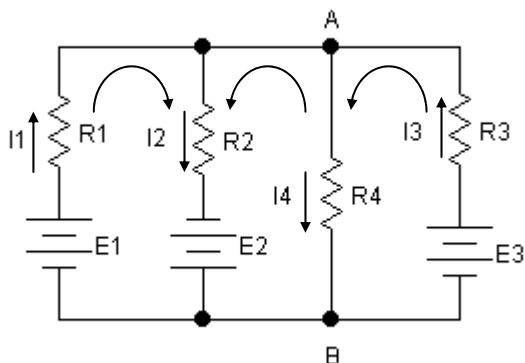
$$E_1 = E_2 = E_3 = 12V$$

$$R_1 = 2,7k\Omega ; R_2 = 1,5k\Omega$$

$$R_3 = 2,2k\Omega ; R_4 = 1k\Omega$$

#### Calcolo dei valori da misurare.

#### Risoluzione applicando i principi di Kirchhoff.



$$\text{Nodi: } n = 2$$

$$\text{Nodi indipendenti: } n - 1 = 1$$

$$\text{Rami: } r = 4$$

$$\text{Maglie indipendenti: } m = r - (n - 1) = 3$$

Si scrivono le equazioni al nodo e alle maglie e si calcolano le correnti resolvendo il sistema di 4 equazioni ottenuto.

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2 + I_4, \\ E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \\ E_2 = R_2 \cdot I_2 - R_4 \cdot I_4 \\ E_3 = R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 - I_3 + I_4 \\ 2,2 \cdot 10^3 I_1 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 = 24 \\ 1,5 \cdot 10^3 I_2 - 1 \cdot 10^3 I_4 = 12 \\ 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1 \cdot 10^3 I_4 = 12 \end{cases}$$

Si risolve la seconda equazione rispetto a  $I_1$  e la terza rispetto  $I_4$ :

$$(a) \quad I_1 = 24 - 1,5 \cdot 10^3 I_2 \quad ; \quad (b) \quad I_4 = \frac{1,5 \cdot 10^3 I_2 - 12}{1 \cdot 10^3}$$

Si sostituisce la (b) nella quarta equazione e si risolve rispetto  $I_3$ :

$$(c) \quad 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 - 12 = 12 \Rightarrow 2,2 \cdot 10^3 I_3 + 1,5 \cdot 10^3 I_2 = 24 \Rightarrow I_3 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 I_2}{2,2 \cdot 10^3}$$

Sostituendo le (a), (b), (c) nella prima equazione si calcola la corrente  $I_2$ :

$$\frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2}{2,7 \cdot 10^3} + \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2}{2,2 \cdot 10^3} = 10^3 \cdot I_2 + \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot I_2 - 12}{1 \cdot 10^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 52,8 - 3,3 \cdot 10^3 I_2 + 64,8 - 4,05 \cdot 10^3 I_2 = 5,94 \cdot 10^3 I_2 + 8,91 \cdot 10^3 I_2 - 71,28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22,2 \cdot 10^3 I_2 = 188,88 \Rightarrow I_2 = \frac{188,88}{22,2 \cdot 10^3} = 8,51 \text{mA}$$

Sostituendo nelle (a), (b), (c) si calcolano le correnti  $I_1$ :  $I_3$   $I_4$ :

$$I_1 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3}}{2,7 \cdot 10^3} = 4,16 \text{mA} \quad ; \quad I_4 = \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3} - 12}{1 \cdot 10^3} = 0,765 \text{mA}$$

$$I_3 = \frac{24 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3}}{2,2 \cdot 10^3} = 5,1 \text{mA}$$

Si verifica, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione al nodo, la correttezza dei risultati:

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \Rightarrow 4,16 \cdot 10^{-3} + 5,1 \cdot 10^{-3} = 8,51 \cdot 10^{-3} + 0,765 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 9,26 \cdot 10^{-3} = 9,27 \cdot 10^{-3}$$

Le cadute di tensione sulle resistenze si calcolano applicando ai loro capi la legge di Ohm:

$$V_1 = R_1 I_1 = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 4,16 \cdot 10^{-3} = 11,23 \text{V} \quad ; \quad V_2 = R_2 I_2 = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 8,51 \cdot 10^{-3} = 12,765 \text{V}$$

$$V_3 = R_3 I_3 = 2,2 \cdot 10^3 \cdot 5,1 \cdot 10^{-3} = 11,22 \text{V} \quad ; \quad V_4 = V_{AB} = R_4 I_4 = 1 \cdot 10^3 \cdot 0,765 \cdot 10^{-3} = 0,765 \text{V}$$

**Riassumendo:**  $I_1 = 4,16\text{mA}$  ;  $I_2 = 8,51\text{mA}$  ;  $I_3 = 5,1\text{mA}$  ;  $I_4 = 0,765\text{mA}$  ;  
 $V_1 = 11,23\text{V}$  ;  $V_2 = 12,765\text{V}$  ;  $V_3 = 11,22\text{V}$  ;  $V_4 = 0,765\text{V}$  ;

### Risoluzione applicando il teorema di Millman e la legge di Ohm generalizzata ai tronchi

Si calcola la differenza di potenziale tra i punti A e B:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{12}{2,7 \cdot 10^3} - \frac{12}{1,5 \cdot 10^3} + \frac{12}{2,2 \cdot 10^3}}{\frac{1}{2,7 \cdot 10^3} + \frac{1}{1,5 \cdot 10^3} + \frac{1}{2,2 \cdot 10^3} + \frac{1}{1 \cdot 10^3}} = 0,762\text{V}$$

Si calcolano le cadute di tensione ai capi delle resistenze applicando la legge di Ohm generalizzata ai tronchi ai capi di ogni ramo; quindi, applicando la legge di Ohm ai capi di ogni resistenza, si calcolano le correnti:

$$V_{AB} = E_1 - V_1 \Rightarrow V_1 = E_1 - V_{AB} = 12 - 0,762 = 11,238\text{V} \Rightarrow I_1 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{11,238}{2,7 \cdot 10^3} = 4,16\text{mA}$$

$$V_{AB} = E_2 + V_2 \Rightarrow V_2 = V_{AB} + E_2 = 0,762 + 12 = 12,762\text{V} \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{12,762}{1,5 \cdot 10^3} = 8,51\text{mA}$$

$$V_{AB} = E_3 - V_3 \Rightarrow V_3 = E_3 - V_{AB} = 12 - 0,762 = 11,238\text{V} \Rightarrow I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{11,238}{2,2 \cdot 10^3} = 5,1\text{mA}$$

$$V_{AB} = V_4 = 0,762 \Rightarrow I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{0,762}{1 \cdot 10^3} = 0,762\text{mA}$$

I valori ottenuti coincidono con quelli precedentemente calcolati.

### Sigle e valori dei componenti

$$E_1 = E_2 = E_3 = 12\text{V} ; R_1 = 2,7\text{k}\Omega ; R_2 = 1,5\text{k}\Omega ; R_3 = 2,2\text{k}\Omega ; R_4 = 1\text{k}\Omega$$

### Apparecchiature e strumentazione

Due alimentatori stabilizzati a 12V ; utilizzati come alimentatore duale; un multimetro digitale 4½ digit.

### Procedimento della verifica

1. Si misurano le resistenze.
2. Si monta il circuito utilizzando per  $E_1$  ed  $E_3$  lo stesso alimentatore, per  $E_2$  il duale.
3. Si misura la differenza di potenziale  $V_{AB}$  e le differenze di potenziale ai capi dei generatori e delle resistenze.

4. Utilizzando i valori delle tensioni misurate si calcolano, applicando la legge di Ohm ai capi di ogni resistenza, le correnti:  $I_1 = \frac{V_1}{R_1}$ ;  $I_2 = \frac{V_2}{R_2}$ ;  $I_3 = \frac{V_3}{R_3}$ ;  $I_4 = \frac{V_4}{R_4}$ .
5. Si tabulano i valori misurati e quelli calcolati, per una migliore e più immediata interpretazione dei dati.

### Tabulazione dei dati

	kΩ				Volt								mA			
	R1	R2	R3	R4	E1	E2	E3	V1	V2	V3	V4	I1	I2	I3	I4	
Valori calcolati	2,7	1,5	2,2	1	12	-12	12	11,24	-12,76	11,24	0,76	4,16	8,51	5,1	0,76	
Valori sperimentali	2,73	1,5	2,24	0,99	11,9	-11,92	11,9	11,22	-12,6	11,22	0,68	4,12	8,43	5,01	0,69	

### Conclusioni

I valori sperimentali sono in ottimo accordo con quelli calcolati.