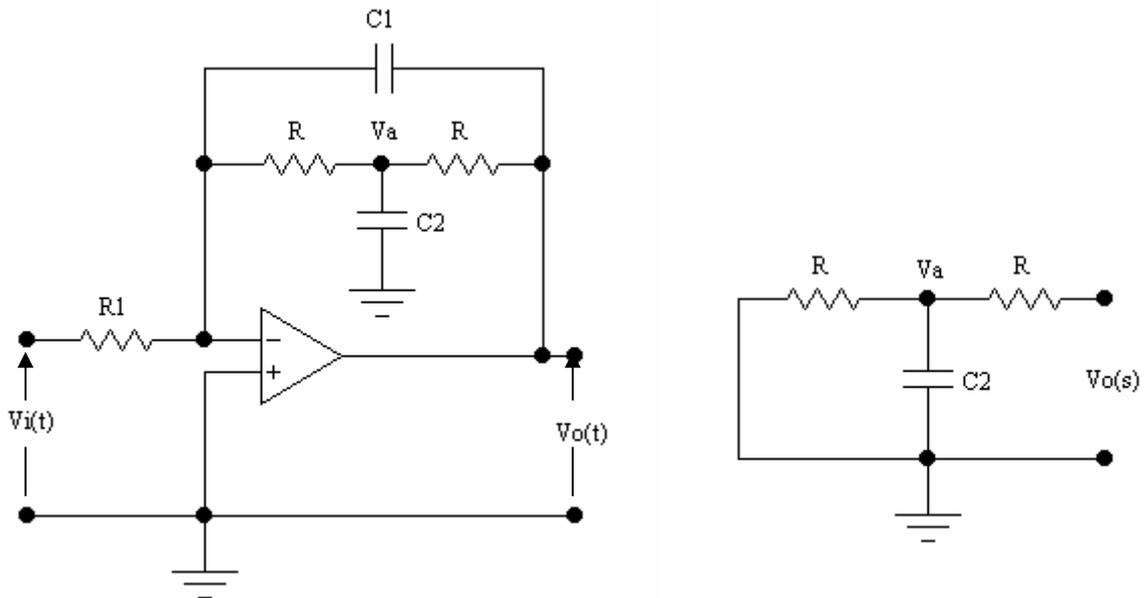


LIMITAZIONE DELL'AMPLIFICAZIONE ALLE BASSE FREQUENZE DELL'INTEGRATORE INVERTENTE MEDIANTE RETE COMPENSATRICE

Il problema dell'integratore invertente si ha alle basse frequenze: l'amplificazione aumenta al diminuire della frequenza, tendendo al massimo valore possibile. Al fine di limitare l'amplificazione alle basse frequenze, si può usare una rete compensatrice R-C₂-R in parallelo alla capacità C₁.



L'impedenza della rete compensatrice è funzione della frequenza. Con $s = j\omega$, si ha:

$$\bar{Z}_C = R + \frac{R \frac{1}{sC_2}}{R + \frac{1}{sC_2}} = R + \frac{R}{1 + sRC_2} = R \frac{2 + sRC_2}{1 + sRC_2} = R \frac{2 + j\omega RC_2}{1 + j\omega RC_2}$$

$$|\bar{Z}_C| = R \frac{\sqrt{2^2 + (\omega RC_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega RC_2)^2}} = R \sqrt{\frac{4 + (\omega RC_2)^2}{1 + (\omega RC_2)^2}} \quad ; \quad \varphi = \angle \bar{Z}_C = \arctg \frac{\omega RC_2}{2} - \arctg \omega RC_2$$

\bar{Z}_C è funzione della frequenza:

$$\text{Se } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \omega RC_2 \ll 1 \Rightarrow (\omega RC_2)^2 \text{ viene trascurato rispetto a 1 e a 4} \Rightarrow |\bar{Z}_C| \cong 2R \quad ; \quad \varphi \cong 0$$

$$\text{Se } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \omega RC_2 \gg 2 \Rightarrow 1 \text{ e } 4 \text{ si trascurano rispetto a } (\omega RC_2)^2 \Rightarrow |\bar{Z}_C| \cong R \quad ; \quad \varphi \cong 0$$

Il comportamento della rete compensatrice può essere spiegato tenendo conto del comportamento della capacità C₂ al variare della frequenza. Alle basse frequenze C₂ tende a comportarsi da circuito aperto e in parallelo a C₁ si sarà la serie delle due resistenze R, ossia 2R. alle alte frequenze tende

ad assumere le caratteristiche di un cortocircuito, cortocircuitando la prima delle due resistenze R, e in parallelo a C₁ vi sarà solo la seconda delle resistenze R.

CALCOLO DELLA FUNZIONE D'USCITA IN NOTAZIONE COMPLESSA

$$\begin{aligned}\bar{V}_o &= -\frac{1}{sC_1} // \bar{Z}_C \bar{V}_i = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{sC_1} \cdot R \cdot \frac{2+sRC_2}{1+sRC_2} \cdot \bar{V}_i = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R \cdot \frac{2+sRC_2}{sC_1(1+sRC_2)}}{\frac{1+sRC_2+2sRC_1+s^2R^2C_1C_2}{sC_1(1+sRC_2)}} \cdot \bar{V}_i = \\ &= -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{2+sRC_2}{1+s^2R^2C_1C_2+sR(2C_1+C_2)} \cdot \bar{V}_i = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{2+j\omega RC_2}{1-\omega^2R^2C_1C_2+j\omega R(2C_1+C_2)} \cdot \bar{V}_i\end{aligned}$$

Al fine di ottenere una semplificazione della funzione d'uscita, si può supporre che, alle frequenze di funzionamento del circuito integratore, risulti:

$$\omega^2R^2C_1C_2 \ll 1 \quad \text{e} \quad \omega RC_2 \ll 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega RC_2} \gg \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{1}{\omega C_2} \gg \frac{R}{2}$$

In tali condizioni si può trascurare $j\omega RC_2$ rispetto a 2 al numeratore e $\omega^2R^2C_1C_2$ rispetto ad 1 al denominatore. La funzione d'uscita approssimata sarà:

$$\bar{V}_o = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{2}{1+j\omega R(2C_1+C_2)} \cdot \bar{V}_i = -\frac{2R}{R_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega R(2C_1+C_2)} \cdot \bar{V}_i$$

La funzione di trasferimento è: $G(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = -\frac{2R}{R_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega R(2C_1+C_2)}$, il cui modulo e fase sono:

$$|G(j\omega)| = \frac{2R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+[\omega R(2C_1+C_2)]^2}} \quad ; \quad \varphi = \pi - \arctg[\omega R(2C_1+C_2)]$$

$$\text{-- Per } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \omega R(2C_1+C_2) \ll 1 \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{2R}{R_1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{2R}{R_1} \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

Il circuito si comporta da amplificatore invertente con conseguente limitazione dell'amplificazione alle basse frequenze.

$$\text{-- Per } \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \omega R(2C_1+C_2) \gg 1 \Rightarrow G(j\omega) = j \frac{2}{\omega R_1(2C_1+C_2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{2}{\omega R_1(2C_1+C_2)} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Il circuito si comporta da integratore invertente.}$$

CALCOLO DELLA FREQUENZA DI TAGLIO

La frequenza di taglio è quella frequenza alla quale la funzione di trasferimento si attenua di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore massimo possibile; pertanto:

$$\frac{2R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + [\omega_t R(2C_1 + C_2)]^2}} = \frac{2R}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_t R(2C_1 + C_2) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega_t = \frac{1}{R(2C_1 + C_2)} \Rightarrow f_t = \frac{1}{2\pi R(2C_1 + C_2)}$$

Il vantaggio di usare questa rete compensatrice in parallelo a C_1 , invece di una semplice resistenza, è quello di disporre di una impedenza che alle basse frequenze della banda vale $2R$ e alle alte frequenze vale R , migliorando (almeno in teoria, la risposta del circuito come integratore.

DIMENSIONAMENTO DEL CIRCUITO

Si devono fissare la frequenza di taglio f_t e l'amplificazione alle basse frequenze $A = \frac{2R}{R_1}$.

La frequenza di taglio conviene sia tale da risultare $\omega_t RC_2 \ll 2$. Poiché $\omega_t = \frac{1}{R(2C_1 + C_2)}$, sostituendo, si ha:

$$\frac{1}{R(2C_1 + C_2)} RC_2 \ll 2 \Rightarrow \frac{2C_1 + C_2}{C_2} \gg 2 \Rightarrow \frac{2C_1}{C_2} + 1 \gg 2 \Rightarrow 2C_1 \gg C_2$$

In tale condizione, nella frequenza di taglio e nella funzione d'uscita, si può trascurare C_2 rispetto a C_1 , ottenendo:

$$\omega_t = \frac{1}{R(2C_1 + C_2)} \cong \frac{1}{2RC_1} \Rightarrow f_t \cong \frac{1}{4\pi RC_1}$$

$$\bar{V}_o = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{2}{1 + j2\omega RC_1} \cdot \bar{V}_i \Rightarrow \begin{cases} V_{oM} = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \cdot V_i \\ \varphi = \pi - \arctg(2\omega RC_1) \end{cases}$$

Calcolo di R , C_1 e C_2

Dalla frequenza di taglio si calcola il valore del prodotto RC_1 : $f_t = \frac{1}{4\pi RC_1} \Rightarrow RC_1 = \frac{1}{4\pi f_t}$.

Si fissa il valore di C_1 e si calcola R . si fissa un valore di C_2 per il quale risulti $C_2 \ll 2C_1$.

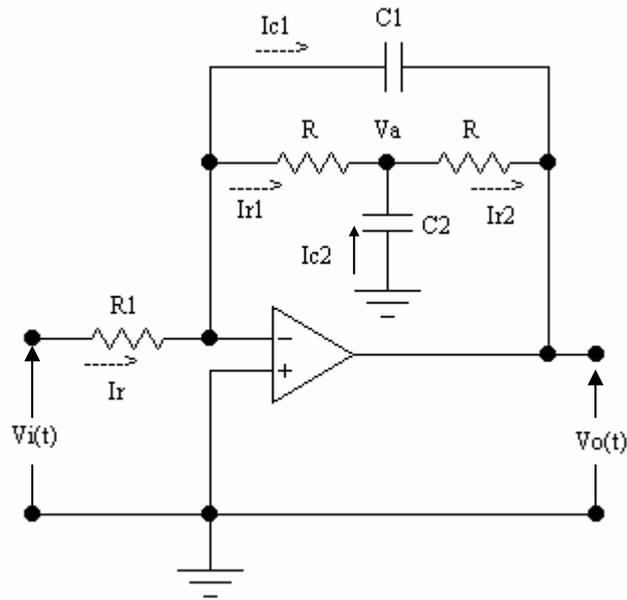
Calcolo di R_1

Noto il valore di R , dall'amplificazione A si calcola R_1 : $A = \frac{2R}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{2R}{A}$.

Il valore di R deve risultare abbastanza grande da determinare per R_1 un valore dell'ordine della decina di $K\Omega$ (R_1 è la resistenza d'ingresso del circuito).

Si controlla che, alla frequenza di taglio, risulti: $\omega_t^2 R^2 C_1 C_2 \ll 1$ e $\omega_t RC_2 = 2\pi f_t RC_2 \ll 2$, ossia che siano soddisfatte le condizioni per le quali è stato possibile semplificare la funzione di trasferimento.

RISPOSTA AD UN GENERICO SEGNALE



Si suppongono gli ingressi equipotenziali e che gli ingressi non assorbono corrente. In tali ipotesi, si ha:

$$I_{R1} + I_{C2} = I_{R2} \Rightarrow -\frac{V_A}{R} - C_2 \frac{dV_A}{dt} = \frac{V_A - V_o}{R} = \frac{V_A}{R} - \frac{V_o}{R} \Rightarrow V_A = -\frac{RC_2}{2} \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_o}{2}$$

Se $RC_2 \ll 2$ la quantità $-\frac{RC_2}{2} \frac{dV_A}{dt}$ può essere trascurata rispetto a $\frac{V_o}{2}$. In tale condizioni, si ha:

$$I_R = I_{C1} + I_{R1} + I_{C2} = I_{C1} + I_{R2} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1} = -C_1 \frac{dV_o}{dt} - \frac{V_A}{R} - C_2 \frac{dV_A}{dt}$$

Supponendo soddisfatta la condizione $RC_2 \ll 2$, si ha:

$$V_A \cong \frac{V_o}{2} \Rightarrow \frac{V_i}{R_1} = -C_1 \frac{dV_o}{dt} - \frac{V_o}{2R} - \frac{C_2}{2} \frac{dV_o}{dt} \Rightarrow$$

$$(2C_1 + C_2) \frac{dV_o}{dt} = -\frac{V_o}{R} - \frac{2V_i}{R_1} \Rightarrow \frac{dV_o}{dt} = V_o' = -\frac{1}{R(2C_1 + C_2)} V_o - \frac{2}{R_1(2C_1 + C_2)} V_i$$

Se si utilizza l'altra relazione tra le correnti, $I_{R1} = I_{C1} + I_{R2}$, si ha:

$$\frac{V_i}{R_1} = -C_1 \frac{dV_o}{dt} + \frac{V_A - V_o}{R} = -C_1 \frac{dV_o}{dt} + \frac{V_A}{R} - \frac{V_o}{R} \cong -C_1 \frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{2R} - \frac{V_o}{R} = -C_1 \frac{dV_o}{dt} - \frac{V_o}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV_o}{dt} = V_o' = -\frac{1}{2RC_1} V_o - \frac{1}{2R_1C_1} V_i$$

Tale equazione differenziale deve dare una soluzione compatibile con l'altra equazione differenziale trovata. Le due equazioni differenziali tendono a coincidere se C_2 risulta trascurabile rispetto a C_1 , ossia se risulta $C_2 \ll 2C_1$.

Le equazioni ottenute sono equazioni differenziali del primo ordine del tipo $y' = a(x) \cdot y + b(x)$, la cui equazione risolutiva generale è $y = e^{\int a(x) dx} \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + k \right]$. Dall'uguaglianza dei coefficienti risulta:

$$a(x) = a(t) = -\frac{1}{2RC_1} \quad ; \quad b(x) = b(t) = -\frac{1}{R_1C_1} V_i(t) \quad ;$$

$$\int a(t) dt = \int -\frac{1}{2RC_1} dt = -\frac{1}{2RC_1} t \quad ; \quad \int b(t) \cdot e^{-\int a(t) dt} dt = \int -\frac{1}{R_1C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1} t} dt$$

Infine
$$V_o(t) = e^{-\frac{1}{2RC_1} t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1} t} dt + \lambda \right].$$

Segnale sinusoidale

Se il segnale d'ingresso è $V_i(t) = V_{iM} \sin \omega t$, sostituendo nell'equazione risolutiva si calcola la risposta del circuito al segnale sinusoidale.

$$V_o(t) = e^{-\frac{1}{2RC_1} t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1} t} dt + \lambda \right] = e^{-\frac{1}{2RC_1} t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1C_1} V_{iM} \sin \omega t \cdot e^{\frac{1}{2RC_1} t} dt + \lambda \right].$$

Risolvendo l'integrale per parti si ha:

$$V_o(t) = e^{-\frac{1}{2RC_1} t} \cdot \left[-\frac{V_{iM}}{R_1C_1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2RC_1} t} \left(\frac{1}{2RC_1} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right)}{\frac{1}{(2RC_1)^2} + \omega^2} + \lambda \right] =$$

$$= -\frac{V_{iM}}{R_1 C_1} \cdot \frac{\frac{1}{2RC_1} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\frac{1}{(2RC_1)^2} + \omega^2} + \lambda e^{-\frac{1}{2RC_1} t}$$

La soluzione trovata è composta da due termini: il termine senza l'esponenziale è la soluzione a regime; il termine con l'esponenziale è la risposta transitoria, che descrive il transitorio iniziale.

La costante λ si determina imponendo che al tempo $t = 0$ sia $V_o(0) = 0$:

$$V_o(0) = -\frac{V_{iM}}{R_1 C_1} \cdot \frac{-\omega}{\frac{1}{(2RC_1)^2} + \omega^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{V_{iM}}{R_1 C_1} \cdot \frac{4\omega R^2 C_1^2}{1 + (2\omega RC_1)^2} = -\frac{4V_{iM} R}{R_1} \cdot \frac{\omega RC_1}{1 + (2\omega RC_1)^2}$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo l'esponenziale diventa circa uguale a zero, e rimane la sola risposta a regime.

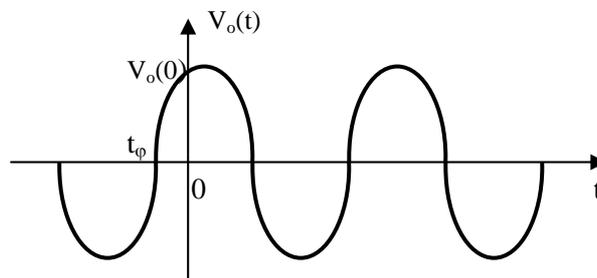
$$V_o(t) = -\frac{V_{iM}}{R_1 C_1} \cdot \frac{\frac{1}{2RC_1} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\frac{1}{(2RC_1)^2} + \omega^2} = -\frac{V_{iM}}{R_1 C_1} \cdot \frac{\sin \omega t - 2\omega RC_1 \cos \omega t}{\frac{1 + (2\omega RC_1)^2}{(2RC_1)^2}} =$$

$$= -\frac{2RV_{iM}}{R_1} \cdot \frac{\sin \omega t - 2\omega RC_1 \cos \omega t}{1 + (2\omega RC_1)^2}$$

Il segnale d'uscita, a regime, è una combinazione lineare delle funzioni seno e coseno, ossia può essere scritto come:

$$V_o(t) = V_{oM} \sin(\omega t + \varphi) = V_{oM} (\cos \varphi \sin \omega t + \sin \varphi \cos \omega t).$$

φ è la fase, ossia definisce il valore della tensione $V_o(t)$ al tempo $t = 0$.



L'angolo φ è legato al tempo dalla relazione $\omega t_\varphi = \varphi$, dove t_φ è il tempo in cui la funzione $V_o(t)$ assume il valore zero (immediatamente prima o immediatamente dopo l'origine in crescita in campo positivo), in anticipo rispetto al tempo zero se $t_\varphi < 0$, e in ritardo se $t_\varphi > 0$. Al fine di calcolare φ si impone che $V_o(t)$ calcolato al tempo $t = t_\varphi$ sia uguale a zero e si risolve rispetto a $\omega t_\varphi = \varphi$.

$$V_o(t_\varphi) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} \cdot \frac{\sin(\omega t_\varphi) - 2\omega RC_1 \cos(\omega t_\varphi)}{1 + (2\omega RC_1)^2} = 0 \Rightarrow \sin(\omega t_\varphi) - 2\omega RC_1 \cos(\omega t_\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t_\varphi) = 2\omega RC_1 \cos(\omega t_\varphi) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\omega t_\varphi) = \frac{\sin(\omega t_\varphi)}{\cos(\omega t_\varphi)} = 2\omega RC_1 = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(2\omega RC_1)$$

Al fine di determinare V_{oM} , si esplicitano $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ in funzione di $\operatorname{tg}\varphi$ e si sostituiscono nell'espressione di $V_o(t)$ generica:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{2\omega RC_1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}}$$

$$V_o(t) = V_{oM}(\cos\varphi \sin\omega t + \sin\varphi \cos\omega t) = V_{oM} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \sin\omega t + \frac{2\omega RC_1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \cos\omega t \right)$$

Si predispone la funzione $V_o(t)$, calcolata risolvendo l'equazione differenziale, in modo conveniente per un confronto con l'espressione su scritta.

$$V_o(t) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} \cdot \frac{\sin\omega t - 2\omega RC_1 \cos\omega t}{1 + (2\omega RC_1)^2} =$$

$$= -\frac{2RV_{iM}}{R_1 \sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \sin\omega t - \frac{2\omega RC_1}{\sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \cos\omega t \right)$$

Dal confronto delle due espressioni di $V_o(t)$, si ha: $V_{oM} = -\frac{2RV_{iM}}{R_1 \sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}}$.

Poiché il coefficiente del coseno è negativo, implica che $\sin\varphi$ è negativo, quindi l'angolo φ è negativo, ossia il segnale d'uscita è ritardato rispetto a quello d'ingresso.

Riassumendo: $V_o(t) = V_{oM} \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1 \sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \sin[\omega t - \operatorname{arctg}(2\omega RC_1)]$

oppure, conglobando il segno meno nel seno, si ha:

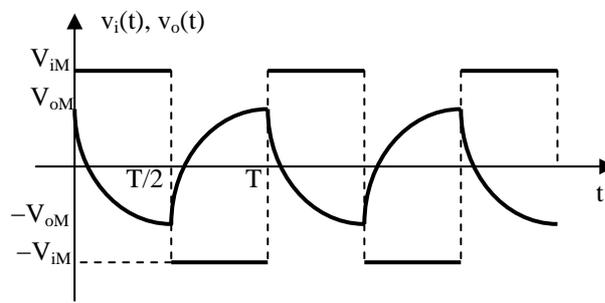
$$V_o(t) = V_{oM} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{2RV_{iM}}{R_1 \sqrt{1 + (2\omega RC_1)^2}} \sin[\omega t + \pi - \operatorname{arctg}(2\omega RC_1)]$$

- Se $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow 2\omega RC_1 \ll 1 \Rightarrow V_o(t) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} \text{sen}\omega t$ amplificatore invertente
- Se $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow 2\omega RC_1 \gg 1 \Rightarrow V_o(t) = \frac{V_{iM}}{\omega R_1 C_1} \text{sen}\left[\omega t + \frac{\pi}{2}\right]$ integratore invertente

Segnale ad onda quadra

L'equazione algebrica di un segnale ad onda quadra è la seguente:

$$V_i(t) = \begin{cases} V_{iM} & \text{per } kT \leq t < \frac{T}{2} + kT \\ -V_{iM} & \text{per } \frac{T}{2} + kT \leq t < T + kT \end{cases}$$



Il grafico riporta l'andamento dell'onda quadra d'ingresso e il generico segnale d'uscita, in cui sono presenti i transitori di carica e di scarica delle capacità. Poiché il segnale è periodico, limiteremo i calcoli al solo primo periodo, l'estensione ad un generico istante si ottiene incrementando il tempo di kT . L'integrale generale dell'equazione differenziale risolutiva è il seguente:

$$V_o(t) = e^{-\frac{1}{2RC_1}t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1 C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1}t} dt + \lambda \right]$$

Primo semiperiodo, $0 \leq t \leq T/2$, $V_i = V_{iM}$, rampa decrescente

$$\begin{aligned} V_o(t) &= e^{-\frac{1}{2RC_1}t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1 C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1}t} dt + \lambda \right] = e^{-\frac{1}{2RC_1}t} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1 C_1} V_{iM} \cdot e^{\frac{1}{2RC_1}t} dt + \lambda \right] = \\ &= e^{-\frac{1}{2RC_1}t} \cdot \left[-\frac{2RV_{iM}}{R_1} e^{\frac{1}{2RC_1}t} + \lambda \right] = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \lambda e^{-\frac{1}{2RC_1}t} \end{aligned}$$

$$\text{A } t=0 \Rightarrow V_o(0) = V_{oM} \Rightarrow V_o(0) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \lambda = V_{oM} \Rightarrow \lambda = V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}$$

L'equazione di $V_o(t)$ diventa:
$$V_o(t) = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1} \right) e^{-\frac{1}{2RC_1}t}$$

Secondo semiperiodo, $T/2 \leq t \leq T$, $V_i = -V_{iM}$, rampa crescente

$$\begin{aligned} V_o(t) &= e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} \cdot \left[\int -\frac{1}{R_1 C_1} V_i(t) \cdot e^{\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} dt + \lambda \right] = e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} \cdot \left[\int \frac{1}{R_1 C_1} V_{iM} \cdot e^{\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} dt + \lambda \right] = \\ &= e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} \cdot \left[\frac{2RV_{iM}}{R_1} e^{\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} + \lambda \right] = \frac{2RV_{iM}}{R_1} + \lambda e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)} \end{aligned}$$

A $t = \frac{T}{2} \Rightarrow V_o\left(\frac{T}{2}\right) = -V_{oM} \Rightarrow V_o\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{2RV_{iM}}{R_1} + \lambda = -V_{oM} \Rightarrow \lambda = -V_{oM} - \frac{2RV_{iM}}{R_1}$

L'equazione di $V_o(t)$ diventa:
$$V_o(t) = \frac{2RV_{iM}}{R_1} - \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1} \right) e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t-\frac{T}{2}\right)}$$

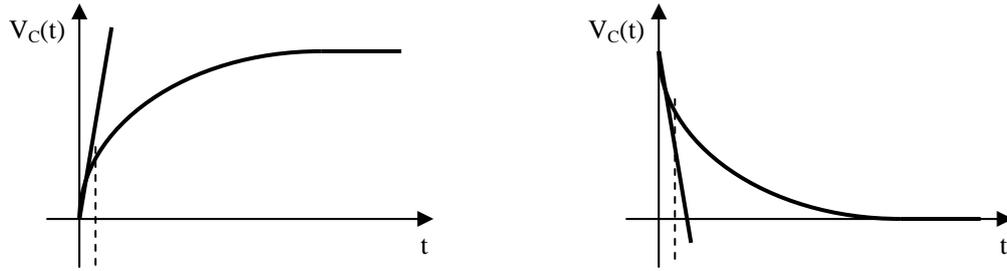
Calcolo di V_{oM}

Se si calcola la rampa in discesa al tempo $t = \frac{T}{2}$, $V_o(t)$ deve assumere il valore $-V_{oM}$. Imponendo ciò nell'equazione della rampa decrescente, si ha:

$$\begin{aligned} V_o\left(\frac{T}{2}\right) &= -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1} \right) e^{-\frac{1}{2RC_1} \frac{T}{2}} = -V_{oM} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{oM} + V_{oM} e^{-\frac{1}{2RC_1} \frac{T}{2}} &= \frac{2RV_{iM}}{R_1} - \frac{2RV_{iM}}{R_1} e^{-\frac{1}{2RC_1} \frac{T}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_{oM} \left(1 + e^{-\frac{T}{4RC_1}} \right) &= \frac{2RV_{iM}}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{T}{4RC_1}} \right) \Rightarrow V_{oM} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{4RC_1}}}{1 + e^{-\frac{T}{4RC_1}}} \cdot \frac{2RV_{iM}}{R_1} \end{aligned}$$

Approssimazione della funzione d'uscita

Nel caso in cui risulti $2RC_1 \gg \frac{T}{2}$, la carica e la scarica della capacità interesserà solo un piccolo tratto iniziale delle curve di carica (o di scarica) in un intorno di $t = 0$, ossia un tratto circa lineare che può essere approssimato da una retta, come nelle figure.



Nell'intorno dello zero [$t = 0$ e $t - T/2 = 0$] si può sviluppare l'esponenziale con McLaurin, fermando lo sviluppo alla derivata prima.

$$e^{-\frac{1}{2RC_1}t} = 1 - \frac{1}{2RC_1}t \quad ; \quad e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t - \frac{T}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2RC_1}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Si sostituiscono, rispettivamente, nelle equazioni delle rampe decrescente e crescente.

Primo semiperiodo, $0 \leq t \leq T/2$, $V_i = V_{iM}$, rampa decrescente

$$\begin{aligned} V_o(t) &= -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) e^{-\frac{1}{2RC_1}t} = -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) \left(1 - \frac{1}{2RC_1}t\right) = \\ &= -\frac{2RV_{iM}}{R_1} + V_{oM} - \frac{V_{oM}}{2RC_1}t + \frac{2RV_{iM}}{R_1} - \frac{2RV_{iM}}{R_1} \cdot \frac{1}{2RC_1}t = -\left(\frac{V_{oM}}{2RC_1} + \frac{V_{iM}}{R_1C_1}\right)t + V_{oM} \end{aligned}$$

Calcolo di V_{oM}

Se si calcola la rampa in discesa al tempo $t = \frac{T}{2}$, $V_o(t)$ deve assumere il valore $-V_{oM}$. Imponendo ciò nell'equazione della rampa decrescente, si ha:

$$\begin{aligned} V_o\left(\frac{T}{2}\right) &= -\left(\frac{V_{oM}}{2RC_1} + \frac{V_{iM}}{R_1C_1}\right) \cdot \frac{T}{2} + V_{oM} = -\frac{V_{oM}}{2RC_1} \cdot \frac{T}{2} - \frac{V_{iM}}{R_1C_1} \cdot \frac{T}{2} + V_{oM} = -V_{oM} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 2V_{oM} - \frac{T}{4RC_1}V_{oM} &= \frac{T}{2R_1C_1}V_{iM} \quad \Rightarrow \quad V_{oM} \cdot \frac{8RR_1C_1 - R_1T}{4RR_1C_1} = \frac{2RT}{4RR_1C_1}V_{iM} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad V_{oM} &= \frac{T}{8RC_1 - T} \cdot \frac{2R}{R_1}V_{iM} \cong \frac{T}{4R_1C_1}V_{iM} \end{aligned}$$

Essendo valida la condizione $2RC_1 \gg \frac{T}{2}$, si può trascurare T a denominatore rispetto a $8RC_1$.

Stesso risultato si ottiene dal V_{oM} prima calcolato, sostituendo all'esponenziale il suo sviluppo con McLaurin.

$$V_{oM} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{4RC_1}}}{1 + e^{-\frac{T}{4RC_1}}} \cdot \frac{2RV_{iM}}{R_1} = \frac{1 - 1 - \frac{T}{4RC_1}}{1 + 1 - \frac{T}{4RC_1}} \cdot \frac{2RV_{iM}}{R_1} = \frac{T}{8RC_1 - T} \cdot \frac{2R}{R_1} V_{iM} \cong \frac{T}{4R_1C_1} V_{iM}$$

Sostituendo nell'espressione di $V_o(t)$, si ha:

$$\begin{aligned} V_o(t) &= -\left(\frac{V_{oM}}{2RC_1} + \frac{V_{iM}}{R_1C_1}\right)t + V_{oM} = -\left(\frac{1}{2RC_1} \cdot \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} + \frac{V_{iM}}{R_1C_1}\right)t + \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} = \\ &= -\frac{V_{iM}}{R_1C_1} \left(\frac{T}{8RC_1} + 1\right)t + \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} = -\frac{V_{iM}}{R_1C_1} \cdot \frac{T + 8RC_1}{8RC_1}t + \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} \cong -\frac{V_{iM}}{R_1C_1}t + \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} \end{aligned}$$

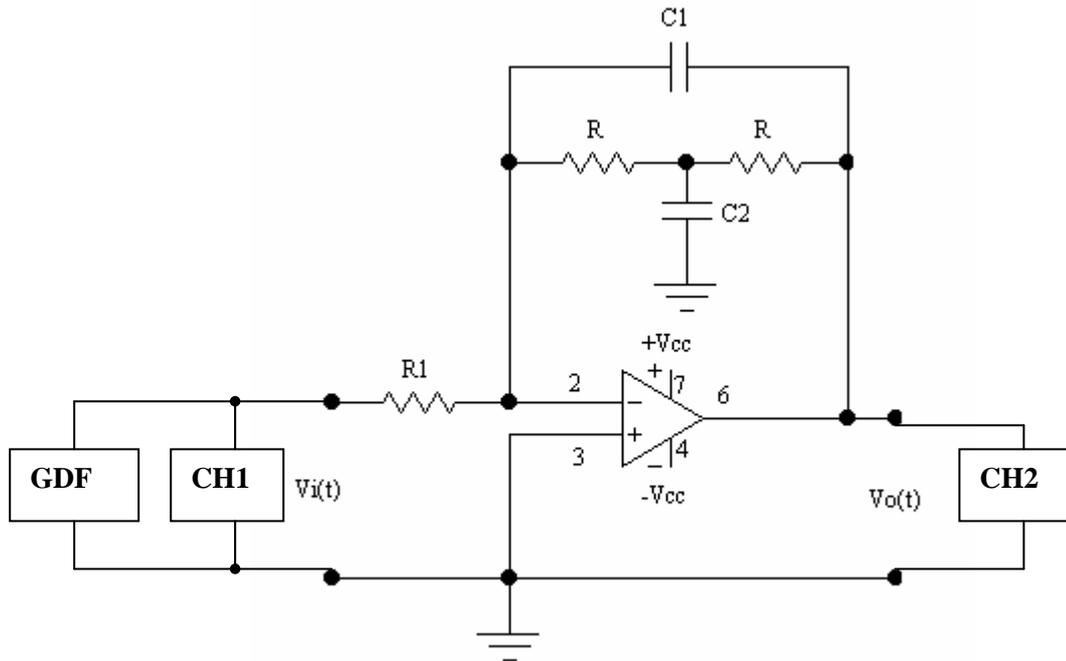
Riassumendo: $V_o(t) = -\frac{V_{iM}}{R_1C_1}t + \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1}$; $V_{oM} = \frac{T}{4R_1C_1}V_{iM}$

Secondo semiperiodo, $T/2 \leq t \leq T$, $V_i = -V_{iM}$, rampa crescente

$$\begin{aligned} V_o(t) &= \frac{2RV_{iM}}{R_1} - \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) e^{-\frac{1}{2RC_1}\left(t - \frac{T}{2}\right)} = \frac{2RV_{iM}}{R_1} - \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) \left[1 - \frac{1}{2RC_1}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{2RV_{iM}}{R_1} - V_{oM} - \frac{2RV_{iM}}{R_1} + \left(V_{oM} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) \frac{1}{2RC_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) = \\ &= -\frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} + \left(\frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} + \frac{2RV_{iM}}{R_1}\right) \frac{1}{2RC_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) = -\frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} + \left(\frac{T}{8RC_1} + 1\right) \frac{V_{iM}}{R_1C_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) = \\ &= -\frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} + \frac{T + 8RC_1}{8RC_1} \cdot \frac{V_{iM}}{R_1C_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) \cong \frac{V_{iM}}{R_1C_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1} \end{aligned}$$

Riassumendo: $V_o(t) = \frac{V_{iM}}{R_1C_1} \left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{TV_{iM}}{4R_1C_1}$; $-V_{oM} = -\frac{T}{4R_1C_1}V_{iM}$

PROGETTO DI UN INTEGRATORE REALE INVERTENTE CON LIMITAZIONE DELL'AMPLIFICAZIONE MEDIANTE RETE COMPENSATRICE



Si fissa una frequenza di taglio di 3kHz e una amplificazione alle basse frequenze di $A = \frac{2R}{R_1} = 5$.
 Nella frequenza di taglio, assumendo $C_2 \ll 2C_1$, si trascura C_2 rispetto a C_1 . In tale caso, si ha:

$$f_t = \frac{1}{4\pi RC_1}$$

Calcolo di R , C₁ e C₂

Dalla frequenza di taglio si calcola il valore del prodotto RC₁:

$$f_t = \frac{1}{4\pi RC_1} \Rightarrow RC_1 = \frac{1}{4\pi f_t} = \frac{1}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^3} = 26,53\mu s .$$

Si fissa il valore di $C_1 = 1\eta F$ e si calcola $R = \frac{26,53 \cdot 10^{-6}}{4\pi C_1} = \frac{26,53 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 1 \cdot 10^{-9}} \cong 27k\Omega$

Si fissa $C_2 = 10pF \ll 2C_1 = 2\eta F$.

Calcolo di R₁

Noto il valore di R, dall'amplificazione A si calcola R₁:

$$A = \frac{2R}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{2R}{A} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 10^3}{5} = 10,8k\Omega ., \text{ valore commerciale } 10k\Omega .$$

Riassumendo: $R = 27\text{k}\Omega$; $R_1 = 10\text{k}\Omega$; $C_1 = 1\text{nF}$; $C_2 = 10\text{pF}$.

Con tali valori:

$$f_t = \frac{1}{4\pi RC_1} = \frac{1}{4\pi \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9}} = 2,95\text{kHz}$$

Si controlla che, alla frequenza di taglio, risulti: $\omega_t^2 R^2 C_1 C_2 \ll 1$ e $\omega_t RC_2 = 2\pi f_t RC_2 \ll 2$, ossia che siano soddisfatte le condizioni per le quali è stato possibile semplificare la funzione di trasferimento.

$$(\omega_t R)^2 C_1 C_2 = (2\pi f_t R)^2 C_1 C_2 = (2\pi \cdot 2,95 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^3)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-12} = 0,0025 \ll 1$$

$$\omega_t RC_2 = 2\pi f_t RC_2 = 2\pi \cdot 2,95 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-12} = 0,005 \ll 2$$

$$RC_2 = 27 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-12} = 0,27 \cdot 10^{-6} \ll 2$$

$$8RC_1 \gg T \Rightarrow f = \frac{1}{T} \gg \frac{1}{8RC_1} = \frac{1}{8 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9}} = 4,63\text{kHz}$$

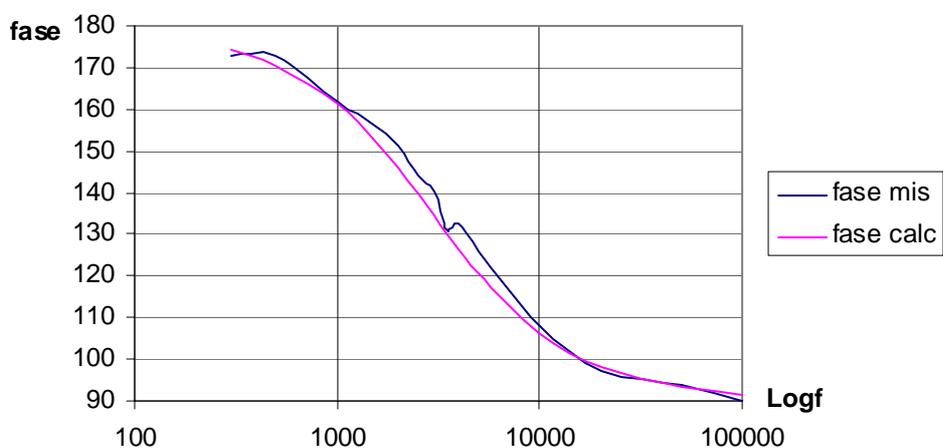
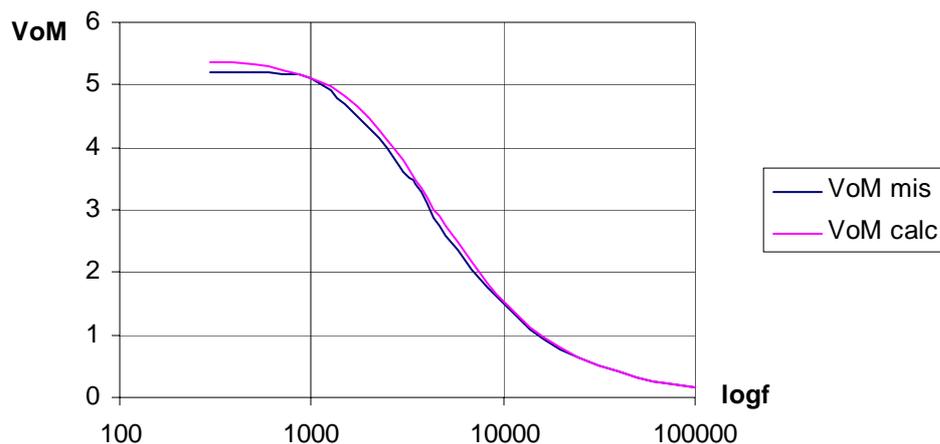
Si comporterà da integratore per frequenze molto più grandi di 4,63kHz, intorno ai 20 ÷ 30kHz.

Risposta al segnale sinusoidale

Si utilizza un segnale sinusoidale di ampiezza $V_{iM} = 1\text{V}$. Le formule per il calcolo dei valori teorici e per calcolare la fase sperimentale φ sono:

$$V_{oM} = \frac{2RV_{iM}}{R_1 \sqrt{1 + (4\pi f \cdot RC_1)^2}} ; \quad \varphi = \pi - \arctg(4\pi f \cdot RC_1) ; \quad \Delta t = \frac{\varphi}{360^\circ f} ; \quad \varphi = 360^\circ f \cdot \Delta t$$

Segnale sinusoidale											
Valori calcolati							Valori misurati				
kHz	Volt		Adimensionali		Gradi	μs	Volt	Adimensionali	μs	Gradi	
f	V_{iM}	V_{oM}	A	A_{dB}	φ	Δt	V_{oM}	A	A_{dB}	Δt	φ
0,3	1	5,372	5,372	14,60	174,18	1612,8	5,2	5,2	14,32	1600	172,8
0,5	1	5,324	5,324	14,52	170,37	946,50	5,2	5,2	14,32	960	172,8
1	1	5,113	5,113	14,17	161,25	447,93	5,1	5,1	14,15	450	162
1,5	1	4,813	4,813	13,64	153,02	283,37	4,7	4,7	13,44	290	156,6
2	1	4,469	4,469	13,00	145,83	202,55	4,3	4,3	12,66	210	151,2
2,5	1	4,118	4,118	12,29	139,68	155,20	4	4	12,04	160	144
3	1	3,785	3,785	11,56	134,48	124,52	3,6	3,6	11,12	130	140,4
3,5	1	3,479	3,479	10,82	130,08	103,24	3,4	3,4	10,62	104	131,04
4	1	3,204	3,204	10,11	126,37	87,757	3,1	3,1	9,827	92	132,48
5	1	2,743	2,743	8,765	120,50	66,944	2,6	2,6	8,299	70	126
10	1	1,527	1,527	3,678	106,39	29,553	1,5	1,5	3,521	30	108
20	1	0,787	0,787	-2,07	98,345	13,659	0,76	0,76	-2,383	13,5	97,2
50	1	0,317	0,317	-9,95	93,331	5,1850	0,31	0,31	-10,17	5,2	93,6
100	1	0,159	0,159	-15,9	91,644	2,5456	0,16	0,16	-15,91	2,5	90

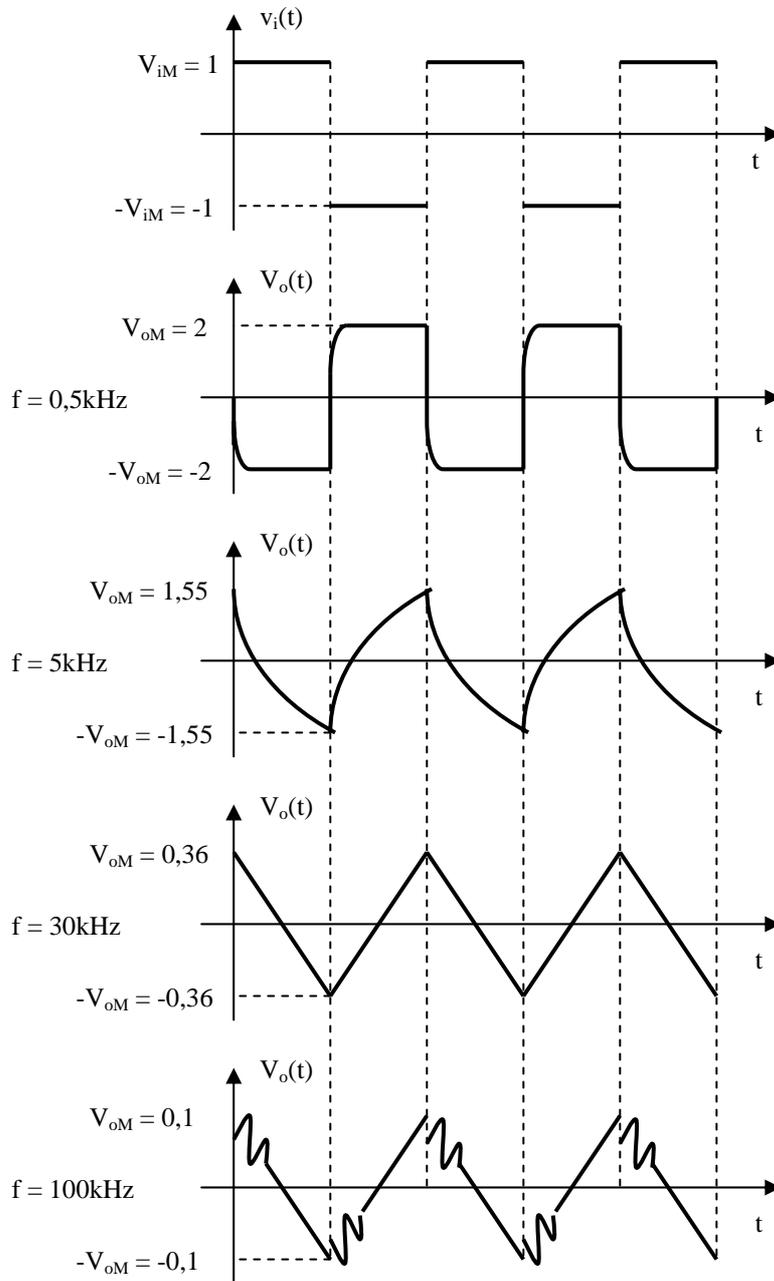


Risposta al segnale ad onda quadra

Si utilizza un segnale ad onda quadra di ampiezza $V_{iM} = 1V$ e valore medio nullo. Le formule per il calcolo dei valori teorici, esatti e approssimati, sono:

Onda quadra $V_{oM} = 1V$ e $f_t = 3kHz$					
Valori calcolati				Valori misurati	
kHz	Volt			Volt	Commenti
f	V_{iM}	V_{oM} esat	V_{oM} appr	V_{oM}	
0,3	1	2,7	41,66	2	Onda quadra con transistori di carica e scarica
0,5	1	2,7	25	2	Onda quadra con transistori di carica e scarica
1	1	2,699	12,5	2	Si accentuano i transistori di carica e scarica
2	1	2,647	6,25	2	Transistori di carica e scarica che si esauriscono
3	1	2,464	4,166	1,85	I transistori di carica e scarica non si esauriscono
5	1	1,967	2,5	1,55	Comincia a comportarsi da integratore
10	1	1,167	1,25	1	I transistori di carica e scarica sono poco evidenti
20	1	0,614	0,625	0,52	Il segnale d'uscita è circa triangolare
50	1	0,249	0,25	0,2	Triangolare con piccole oscillazioni inizio rampa
100	1	0,1249	0,125	0,1	Triangolare con sensibili oscillazioni inizio rampa
200	1	0,0624	0,0625	0,05	Triangolare con forti oscillazioni inizio rampa

Forme d'onda alle varie frequenze



Se si vuole che il circuito integri a frequenze più basse, bisogna aumentare il valore della capacità C_1 . se si porta il suo valore a $10\mu\text{F}$, la frequenza di taglio subisce una diminuzione di 10 volte, ossia il suo valore sarà di $0,3\text{kHz}$.

Si ripetono le misure con l'onda quadra. Le formule per il calcolo dei valori teorici, esatti e approssimati, sono le stesse di prima.

Onda quadra $V_{oM} = 1V$ e $f_t = 3kHz$					
Valori calcolati			Valori misurati		
kHz	Volt			Volt	Commenti
f	V_{iM}	V_{oM} esat	V_{oM} appr	V_{oM}	
0,2	1	2,647	125	2	Transitori di carica e scarica si esauriscono appena
0,3	1	2,464	83,333	1,7	Transitori di carica e scarica non si esauriscono
0,5	1	1,967	50	1,2	Transitori di carica e scarica non si esauriscono
1	1	1,167	25	0,75	Non si esauriscono i transitori ma tende a triangolare
2	1	0,614	12,5	0,4	Quasi triangolare indistorta
3	1	0,413	8,333	0,275	Triangolare indistorta
5	1	0,249	5	0,17	Triangolare con piccole oscillazioni inizio rampa
10	1	0,1249	2,5	0,0825	Triangolare con piccole oscillazioni inizio rampa
20	1	0,06248	1,25	0,042	Triangolare con sensibili oscillazioni inizio rampa
50	1	0,02499	0,5		Triangolare con forti oscillazioni inizio rampa
100	1	0,0125	0,25		Triangolare con forti oscillazioni inizio rampa
200	1	0,00625	0,125		Triangolare con forti oscillazioni inizio rampa

