CIRCUITI CHE DANNO IN USCITA UNA TENSIONE CHE È LA MEDIA O LA MEDIA PONDERATA DELLE TENSIONI D'INGRESSO

DEFINIZIONE DI MEDIA E DI MEDIA PONDERATA

$$V_{Med} = \frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{n} \quad ; \quad V_{MedPond} = \frac{a_1 V_1 + a_2 V_2 + ... + a_n V_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

a_1 , a_2 , … , a_n sono i pesi.

Si utilizzano tre tensioni d'ingresso. I pesi, nella media ponderata, sono $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $a_3 = 1$.
I circuiti che realizzano tali funzioni sono i circuiti sommatori, sia invertente sia non invertente.
Le funzioni da realizzare sono:

Sommatore invertente

$$V_{Med} = V_o = -\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} = -\frac{1}{3} \cdot (V_1 + V_2 + V_3)$$

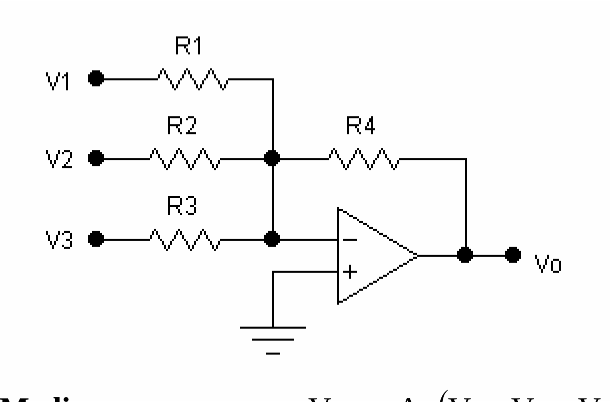
$$V_{MedPond} = V_o = -\frac{3V_1 + 2V_2 + V_3}{6} = -\left(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{3}V_2 + \frac{1}{6}V_3\right)$$

Sommatore non invertente

$$V_{Med} = V_o = \frac{1}{3} \cdot (V_1 + V_2 + V_3)$$

$$V_{MedPond} = V_o = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{3}V_2 + \frac{1}{6}V_3$$

SOMMATORE INVERTENTE



$$V_o = -\frac{R_4}{R_1}V_1 - \frac{R_4}{R_2}V_2 - \frac{R_4}{R_3}V_3$$

Media:

$$V_o = -A \cdot (V_1 + V_2 + V_3) = -AV_1 - AV_2 - AV_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} = A \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R_4}{A}$$

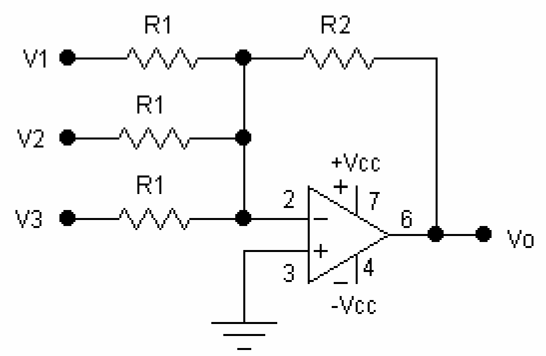
Media ponderata:

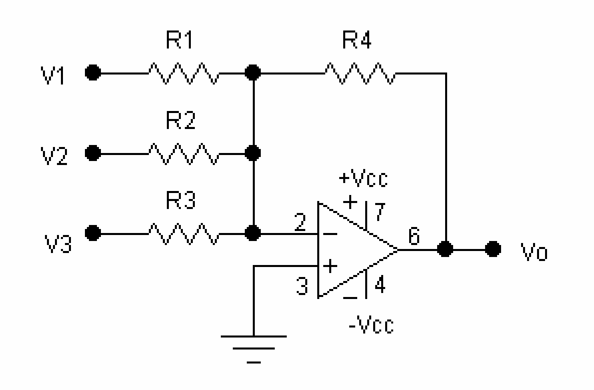
$$V_o = -\frac{A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3}{A_1 + A_2 + A_3} = -\frac{A_1}{A_1 + A_2 + A_3}V_1 - \frac{A_2}{A_1 + A_2 + A_3}V_2 - \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3}V_3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad ; \quad \frac{R_4}{R_2} = \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad ; \quad \frac{R_4}{R_3} = \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Nel caso della media le resistenze d'ingresso sono tra loro uguali.

Media | **Media ponderata**





Media: $$V_o = -\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} = -\frac{1}{3}\cdot(V_1 + V_2 + V_3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o = -\frac{R_2}{R_1}(V_1 + V_2 + V_3) = -\frac{1}{3}\cdot(V_1 + V_2 + V_3) \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 3R_2$$

Si fissa $R_2 = 33\text{k}\Omega$ e si calcola $R_1 = 3R_2 = 99\text{k}\Omega$, valore commerciale $100\text{k}\Omega$.

Media ponderata: $$V_o = -\frac{3V_1 + 2V_2 + V_3}{6} = -\frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{3}V_2 - \frac{1}{6}V_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_o = -\frac{R_4}{R_1}V_1 - \frac{R_4}{R_2}V_2 - \frac{R_4}{R_3}V_3 = -\frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{3}V_2 - \frac{1}{6}V_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{R_4}{R_1} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 2R_4 \\ \dfrac{R_4}{R_2} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad R_2 = 3R_4 \\ \dfrac{R_4}{R_3} = \dfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad R_3 = 6R_4 \end{cases}$$

Si fissa $R_4 = 27\text{k}\Omega$ e si calcolano R_1, R_2, R_3:

- $R_1 = 2R_4 = 2\cdot 27\cdot 10^3 = 54\text{k}\Omega$ valore commerciale $56\text{k}\Omega$.
- $R_2 = 3R_4 = 3\cdot 27\cdot 10^3 = 82\text{k}\Omega$ valore commerciale $82\text{k}\Omega$.
- $R_3 = 6R_4 = 6\cdot 27\cdot 10^3 = 162\text{k}\Omega$ valore commerciale $330\text{k}\Omega//330\text{k}\Omega = 165\text{k}\Omega$.

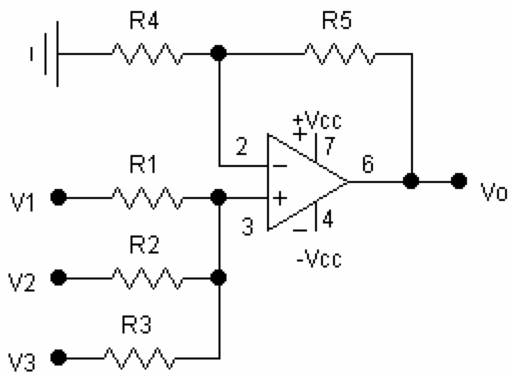
Riassumendo: $R_1 = 56\text{k}\Omega$; $R_2 = 82\text{k}\Omega$; $R_3 = 330\text{k}\Omega//330\text{k}\Omega = 165\text{k}\Omega$; $R_4 = 27\text{k}\Omega$.

Con tali valori, si ha: $$V_o = -\frac{R_4}{R_1}V_1 - \frac{R_4}{R_2}V_2 - \frac{R_4}{R_3}V_3 = -\frac{27\cdot 10^3}{56\cdot 10^3}V_1 - \frac{27\cdot 10^3}{82\cdot 10^3}V_2 - \frac{27\cdot 10^3}{165\cdot 10^3}V_3 =$$

$$= -0{,}482V_1 - 0{,}329V_2 - 0{,}164V_3 = -\frac{2{,}892V_1 + 1{,}974V_2 + 0{,}982V_3}{6} \cong -\frac{3V_1 + 2V_2 + 1V_3}{6}$$

SOMMATORE NON INVERTENTE

Il circuito base per la media e la media ponderata è quello di figura.



La funzione d'uscita è la seguente:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)\left(\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3}V_1 + \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3}V_2 + \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2}V_3\right)$$

Media Nel caso della media la funzione d'uscita deve essere: $V_o = A\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)(V_1 + V_2 + V_3)$, cosa che implica l'uguaglianza dei coefficienti di V_1 , V_2 , V_3.

$$\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} = \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{\dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \Rightarrow \quad R_2R_3 = R_1R_3 = R_1R_2$$

Si dividono tutti i termini per R_1R_2, e si ha:

$$\frac{R_2R_3}{R_1R_2} = \frac{R_1R_3}{R_1R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1R_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = 1$$

Tali uguaglianze sono vere se $R_1 = R_2 = R_3$.

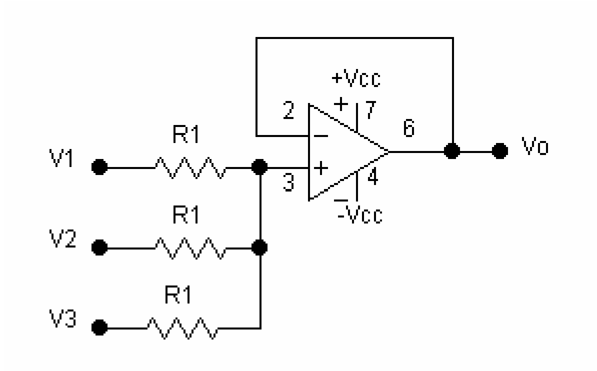
Pertanto:

$$\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} = \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2} = \frac{\frac{R_1}{2}}{R_1 + \frac{R_1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_o = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)(V_1 + V_2 + V_3)$$

Per ottenere in uscita la media delle tensioni d’ingresso bisogna porre

$$1 + \frac{R_5}{R_4} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_5}{R_4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} R_5 = 0 \\ R_4 = \infty \end{cases}$$

Il sommatore assume la configurazione di inseguitore.



$$V_o = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 33k\Omega$$

Media ponderata Nel caso della media la funzione d’uscita deve essere:

$$V_o = \frac{3V_1 + 2V_2 + V_3}{6} = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{3}V_2 + \frac{1}{6}V_3.$$

Poiché i coefficienti delle tensioni d’ingresso sono tutte minori di 1, si può assumere

$1 + \frac{R_5}{R_4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{R_5}{R_4} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} R_5 = 0 \\ R_4 = \infty \end{cases}$, configurazione di inseguitore e la funzione d’uscita diventa:

$$V_o = \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3}V_1 + \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3}V_2 + \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2}V_3 = A_1V_1 + A_2V_2 + A_3V_3$$

Si deve, quindi, porre

$$V_o = \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3}V_1 + \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3}V_2 + \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2}V_3 = A_1V_1 + A_2V_2 + A_3V_3$$

$$\begin{cases} \dfrac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2} = \dfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_1 R_2 + R_1 R_3 - R_2 R_3 = 0 \\ R_1 R_2 - 2R_1 R_3 + R_2 R_3 = 0 \\ 5R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite. Alla prima si somma la seconda e alla seconda si somma la terza, e si ottiene:

$$\begin{cases} 2R_1 R_2 - R_1 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 (2R_2 - R_3) = 0 \\ 6R_1 R_2 - 3R_1 R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 (2R_2 - R_3) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R_3 = 2R_2$$

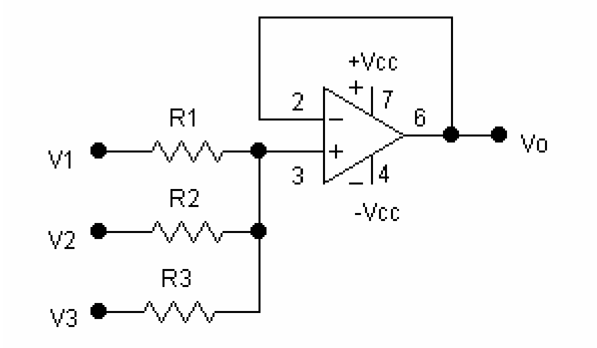
Si ottiene, in entrambi i casi, la stessa equazione; quindi, le tre equazioni sono linearmente dipendenti. Si avranno ∞^1 soluzioni, cioè si deve fissare il valore di una delle resistenze e calcolare le altre. Sostituendo nelle tre equazioni al posto di R_3 la quantità $2R_2$, si ha:

$$\begin{cases} R_1 R_2 + 2R_1 R_2 - 2R_2^2 = 0 \\ R_1 R_2 - 4R_1 R_2 + 2R_2^2 = 0 \\ 5R_1 R_2 - 2R_1 R_2 - 2R_2^2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3R_1 - 2R_2 = 0 \\ -3R_1 + 2R_2 = 0 \\ 3R_1 - 2R_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{2}{3} R_2$$

Si fissa il valore di $R_2 = 33k\Omega$ e si calcolano R_1 e R_3:

$$R_1 = \frac{2}{3} R_2 = \frac{2}{3} \cdot 33 \cdot 10^3 = 22k\Omega \quad ; \quad R_1 = 2R_2 = 2 \cdot 33 \cdot 10^3 = 66k\Omega \quad \rightarrow \quad R_1 = 68k\Omega$$

Riassumendo: $R_1 = 22k\Omega$; $R_2 = 33k\Omega$; $R_3 = 68k\Omega$; $V_{CC} = \pm 12V$.



Con tali valori si ha:

$$R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{33 \cdot 10^3 \cdot 68 \cdot 10^3}{33 \cdot 10^3 + 68 \cdot 10^3} = 22{,}22 k\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} = \frac{22{,}22 \cdot 10^3}{22 \cdot 10^3 + 22{,}22 \cdot 10^3} = 0{,}503$$

$$R_1 // R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 68 \cdot 10^3}{22 \cdot 10^3 + 68 \cdot 10^3} = 16{,}62 k\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3} = \frac{16{,}62 \cdot 10^3}{33 \cdot 10^3 + 16{,}62 \cdot 10^3} = 0{,}335$$

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 33 \cdot 10^3}{22 \cdot 10^3 + 33 \cdot 10^3} = 13{,}2 k\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_1 // R_2}{R_3 + R_1 // R_2} = \frac{13{,}2 \cdot 10^3}{68 \cdot 10^3 + 13{,}2 \cdot 10^3} = 0{,}163$$

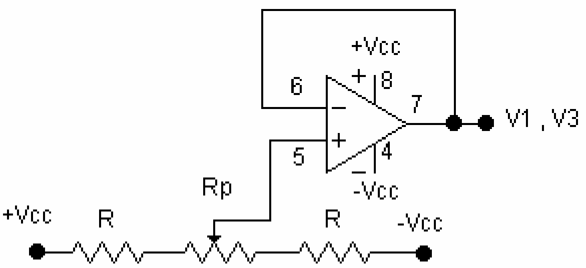
$$V_o = 0{,}503 V_1 + 0{,}335 V_2 + 0{,}163 V_3 = \frac{3{,}015 V_1 + 2{,}01 V_2 + 0{,}975 V_3}{6} \cong \frac{3V_1 + 2V_2 + 1V_3}{6}$$

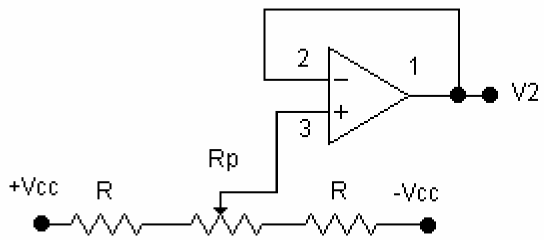
Condizioni di dimensionabilità del circuito

$$\begin{cases} \dfrac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = A_1 \\ \dfrac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = A_2 \\ \dfrac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \dfrac{A_2}{A_1} R_2 \\ \\ \dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{A_2}{A_3} \quad \Rightarrow \quad R_3 = \dfrac{A_2}{A_1} R_2 \end{cases}$$

Le seconde relazioni si ottengono dividendo membro a membro la prima con la seconda e la seconda con la terza. Tali relazioni esistono e sono positive per qualunque valore di A_1 , A_2 , A_3 maggiore di zero e minore di uno: $0 < A_1 , A_2 , A_3 < 1$. poiché nella media ponderata i coefficienti delle tensioni sono sempre maggiori di zero e minori di uno, il circuito risulta sempre dimensionabile.

Tensioni continue variabili d'ingresso. Per inserire le tensioni d'ingresso si utilizzano due generatori di tensione continua variabile da -10V a +10V, realizzati con l'amplificatore operazionale TL081 e due potenziometri 10 giri, come mostrato in figura.





Valori: $R = 1k\Omega$; $R_P = 10k\Omega$ 10 giri ; $V_{CC} = \pm 12V$.

Procedimento di verifica

1. Si monta il circuito invertente per ottenere la media e i due circuiti generatori di tensione continua variabile. Si alimentano i circuiti.
2. Si tarano le tensioni V_1 , V_2 , V_3 secondo la successione dei valori riportati nella tabella I e, per ogni terna di valori, si misura la tensione d'uscita V_o.
3. Si modifica il circuito invertente per ottenere la media ponderata e si ripete il punto 2.
4. Si monta il circuito non invertente per ottenere la media.
5. Si tarano le tensioni V_1 , V_2 , V_3 secondo la successione dei valori riportati nella tabella II e, per ogni terna di valori, si misura la tensione d'uscita V_o.
6. Si modifica il circuito non invertente per ottenere la media ponderata e si ripete il punto 5.
7. Si tabulano i dati e si confrontano con i valori calcolati.

Tabulazione dei dati

Tabella I			**Circuito invertente**			
			$V_o = -\frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$		$V_o = -\frac{3V_1 + 2V_2 + V_3}{6}$	
Volt			Volt		Volt	
V_1	V_2	V_3	V_{oMIS}	V_{oCALC}	V_{oMIS}	V_{oCALC}
1	-5	1	0,98	1	0,98	1
2	-1	2	-096	-1	-0,96	-1
-3	1	-3	1,63	1,67	1,64	1,67
4	-4	4	-1,28	-1,33	1,29	-1,33
3	-6	3	0,01	0	0,01	0

Tabella II			**Circuito non invertente**			
			$V_o = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$		$V_o = \frac{3V_1 + 2V_2 + V_3}{6}$	
Volt			Volt		Volt	
V_1	V_2	V_3	V_{oMIS}	V_{oCALC}	V_{oMIS}	V_{oCALC}
1	-5	1	-0,99	-1	-1	-1
2	-1	2	1	1	0.99	1
-3	1	-3	-1,66	-1,67	-1,65	-1,67
4	-4	4	1,33	1,33	1,31	1,33
3	-6	3	0	0	-0,01	0

I valori misurati sono in ottimo accordo con i valori calcolati.